Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение

«Арзамасский коммерческо-технический техникум»

Саблукова Наталья Геннадьевна

Комплект лекций

по дисциплине «Дискретная математика с элементами математической логики»
Раздел: Математическая логика

для студентов специальности
09.02.07 Информационные системы и программирование

Арзамас
2022

Одобрено методическим объединением естественно-математических и информационных дисциплин
Протокол № 1 от 30.08.2022 г

Саблукова Н.Г.
Комплект лекций по дисциплине «Дискретная математика с элементами математической логики» для студентов специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование – Арзамас: ГБПОУ АКТТ, 2022. – 38 с.

Комплект лекций содержат материал по разделу Математическая логика дисциплины «Дискретная математика с элементами математической логики», изучаемой студентами данной специальности на втором курсе. Представленная информация может быть использована студентами как во время учебных занятий по данной дисциплине, а также в рамках самостоятельной работы во внеурочное время.

Содержание

Введение

Курс лекций составлен в соответствии с рабочей программой дисциплины «Дискретная математика с элементами математической логики» и требованиями федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования по специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование.

Курс лекций раскрывает основные вопросы тем раздела Математическая логика дисциплины «Дискретная математика с элементами математической логики»:

– Алгебра высказываний.
– Булевы функции.

Лекционный материал содержит краткую информацию по основным темам дисциплины. Каждая лекция содержит:

– план (перечень вопросов, рассматриваемых в рамках темы);
– изложение основных вопросов, в соответствии с представленным планом.

Учебное пособие предназначено для студентов очной формы обучения по специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование и может быть использовано как во время учебных занятий по дисциплине «Дискретная математика с элементами математической логики», а также в рамках самостоятельной работы во внеурочное время.

Лекция № 1. Предмет, метод и задачи дискретной математики. Понятие и история развития математической логики

План.

1. Что изучает дискретная математика?
2. Разделы дискретной математики
3. Применение дискретной математики
4. Понятие логики и математической логики
5. История развития математической логики

1) Что изучает дискретная математика?

Математика - это наука о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира. В нее входят такие дисциплины, как арифметика, алгебра, геометрия, тригонометрия, высшая математика (аналитическая геометрия, линейная алгебра, математический анализ, дифференциальное и интегральное исчисления и др.).

Дискретный – это прерывистый, дробный, состоящий из отдельных частей (Толковый словарь русского языка под редакцией Т. Ф. Ефремовой).

В информатике есть понятие дискретная информация, которое обозначает информацию, состоящую из отдельных сигналов, принимающих конечное число значений. Пример дискретного сообщения – процесс чтения книги, информация в которой представлена текстом, т.е. дискретной последовательностью отдельных значков (букв). Противоположным понятию «дискретность» является понятие «непрерывность». Так, в информатике непрерывную информацию можно представить в виде непрерывной волны. Примером непрерывного сообщения служит человеческая речь, передаваемая модулированной звуковой волной; параметром сигнала в этом случае является давление, создаваемое этой волной в точке нахождения приемника – человеческого уха.

Дискретная математика – совокупность математических дисциплин, изучающих свойства абстрактных дискретных объектов.

Дискретные объекты – объекты, имеющие прерывный характер.

<u>Примеры дискретных математических объектов</u>:

- натуральный ряд чисел (1, 2, 3, …);
- конечное множество элементов;
- функция (отображение) из конечного множества в конечное множество;
- слово (последовательность символов) в конечном алфавите;
- формальный язык (множество слов в конечном алфавите);
- конечный граф и другие.

2) Разделы дискретной математики:

- математическая логика;
- теория множеств;
- предикаты и кванторы;
- теория алгоритмов;
- теория графов;
- комбинаторика;
- теория автоматов и т.д.

Дискретная и непрерывная математика взаимно дополняют друг друга. Понятия и методы одной часто используются в другой. Один и тот же объект может рассматриваться с двух точек зрения и в зависимости от этого выбирается непрерывная или дискретная математика.

3) Применение дискретной математики

Дискретная математика – часть математики, которая зародилась в глубокой древности и бурно развивается в 20 веке. Стимулом для развития многих направлений дискретной математики явились запросы теоретической кибернетики, непосредственно связанной с развитием ЭВМ.

1) Дискретная математика является теоретической основой компьютерной математики.

2) Язык дискретной математики удобен и стал метаязыком всей современной математики.

3) Дискретная математика применяется в таких областях знаний, как электроника и информатика, программное обеспечение ЭВМ, теория принятия решений и оптимизация производственных процессов.

Раздел 1. Математическая логика

4) Понятие логики и математической логики

Отцом логики является Аристотель (4 в. до н.э.). Он был учителем Александра Македонского. Аристотель был разносторонний ученый (автор учебника по физике, биология). В то время возникла проблема «Как человек мыслит?» после этого и он придуман логику.

Логика разрабатывалась в связи с потребностями ораторского искусства, то есть как часть риторики. Выдающиеся ораторы пользовались большим уважением. Иногда при определении победителя дискуссии мнения присутствующих разделялись. Одни считали победителем одного из споривших, другие - другого. Это показало всю необходимость разработки правил логики, которые бы позволили избегать подобных разногласий и приходить к единому мнению.

Большой вклад в развитие логики внес древнегреческий философ Сократ (469-399 гг до н.э.). Он рассматривал, каким способом можно получить истинное знание.

Еще недавно почти все учебники логики начинались с умозаключения вида:

1. Все люди смертны
2. Сократ человек
3. Следовательно, Сократ смертен

Такое умозаключение не вызывает ни у кого сомнения.

Здесь можно различить:

Посылка - это утверждение, из которого мы исходим в своих рассуждениях.

Следствие - это утверждение, являющееся результатом наших рассуждений.

Умозаключение - это мыслительный процесс, в котором из одного или нескольких суждений, делается заключение.

А также в логике используются понятия:

Гипотеза - это утверждение, истинность которого требуется доказать.

Противоречие - это ситуация, когда в процессе наших рассуждений получились два взаимоисключающих утверждения.

Суждение - это единица мышления.

Рассмотрим еще два умозаключения:

1. Все студенты нашей группы пошли в кино.
2. Петя – студент нашей группы.
3. Петя пошел в кино.

1. Все студенты нашей группы пошли в кино.
2. Петя пошел в кино.
3. Петя студент нашей группы.

В последнем рассуждении где-то есть ошибка, ведь не все зрители в кино являются студентами нашей группы.

Таким образом, ***задачей логики*** является изучение правильных способов рассуждений, т.е. таких способов, которые приводят к верным результатам, когда верны исходные посылки.

Логика – это наука о формах и законах мышления (согласно словарю Ожегова).

Слово «логика» происходит от греческого слова «логос», что означает «слово», «понятие», «смысл».

Математическая логика выросла из традиционной логики и составила ее значительное расширение.

Математическая логика – это наука о средствах и методах математических доказательств.

5) История развития математической логики

Нематематический этап развития логики

«Традиционная или формальная логика» сформировалась в IV веке до н.э., ее создал древнегреческий ученый Аристотель. Он впервые проанализировал и описал основные логические формы и правила рассуждений, сформулировал основные принципы научных доказательств.

Большой вклад в развитие логики внесли древнегреческий философ Сократ (469-399 гг до н.э.), Евклид (III в. до н.э.).

Древнегреческий математик Евклид (III в. до н.э.) впервые предпринял попытку упорядочить накопившиеся к тому времени обширные сведения по геометрии с общелогических позиций. Он положил начало осознанию геометрии как аксиоматической теории, а всей математики — как совокупности аксиоматических теорий.

Логика Аристотеля для анализа правильного мышления использовала естественный язык.

Формальная логика просуществовала без серьезных изменений более двадцати столетий. Это конечно свидетельствует о гениальности Аристотеля, которому удалось создать столь полную научную систему, но в силу такой неизменности логика приобрела славу мертвой, застывшей науки и вызывала у многих скептическое отношение. Ее сухость и бесплодность высмеивали Франсуа Рабле (Гаргантюа и Пантагрюэль), Джонатан Свифт (Путешествия Гулливера) и др.

Математика является наукой, в которой все утверждения доказываются с помощью умозаключений, т.е. с использованием законов человеческого мышления. Поэтому математика явилась основным потребителем логики. Дальнейшее развитие математики выявило недостаточность Аристотелевой логики и поставило задачу об ее дальнейшем построении на математической основе.

Зарождение математической или символической логики связано с применением в логике математических методов, начало которому положил немецкий философ и математик Готфрид Вильгельм фон Лейбниц (XVII в.). Он сделал попытку заменить простые рассуждения действиями со знаками.

Он пытался построить универсальный язык, с помощью которого можно было бы решать споры между людьми, а затем и вовсе все «идеи заменить вычислениями». В логике Лейбница каждому понятию соответствовал бы символ, а рассуждения имели бы вид вычислений. Эта идея Лейбница, не встретив понимания современников, не получила распространения и развития.

Только в середине XIX века ирландский математик Джордж Буль частично воплотил в жизнь идею Лейбница. Им была создана алгебра логики (алгебра высказываний), в которой предложения обозначаются буквам и действуют законы, схожие с законами обычной алгебры. Алгебра логики Буля послужила основой для новой науки – математической логики.

Например: Сегодня на улице холодно и идет дождь.

А – сегодня на улице холодно

В – сегодня на улице дождь

Сегодня на улице холодно и идет дождь: А&В.

В этот период математическая логика оформилась, как алгебра высказываний и была значительно развита в работах шотландского логика Огастеса де Моргана (1806—1871), английского логика, экономиста и статиста Уильяма Стенли Джевонса (1835—1882), американского логика и математика Чарльза Пирса (1839—1914), немецкого алгебраиста и логика Эрнста Шредера (1841— 1902), русского математика, астронома и логика Платона Сергеевича Порецкого (1846—1907).

Однако главное назначение математической логики определилось в конце 19 в., когда стало необходимо обосновать понятия и идеи самой математики.

Становление и развитие математической логики.

В конце 19 века нем. математик Фридрих Людвиг Готлоб Фрёге и итальянский математик Джузеппе Пеано применили математическую логику для обоснования арифметики и теории множеств. Начиная с этих работ, математическая логика изучает основания математики, принципы построения математических теорий.

Компьютерный этап в развитии математической логики (с середины 20 века).

Компьютеры всем управляют на основе математической логики. Сначала математическая логика была абстрактной областью математики и далекой от практики. Однако в начале 20 в. П.С. Эренфест указал на возможность применения аппарата логики высказываний (раздела математической логики) в технике. В середине 20 века была обнаружена связь математической логики с кибернетикой (Кибернетика – наука об общих принципах управления в живых, неживых и искусственных системах)

Джордж фон Нейман в основу работы компьютера заложил метаматематический аппарат, использующий законы математической логики.

Лекция № 2. Понятие высказывания. Основные логические операции

План

1. Понятие высказывания
2. Основные логические операции

1) Понятие высказывания

Алгебра высказываний (алгебра логики) – раздел математической логики, изучающий логические высказывания и способы установления их истинности или ложности с помощью алгебраических методов.

Основатель алгебры высказываний – Дж. Буль

Высказывание – это форма мышления, связное повествовательное предложение, о котором можно сказать, истинно оно или ложно.

Высказывание может быть либо истинно, либо ложно. Высказывания могут быть простыми и составными.

В алгебре высказываний простым высказываниям ставятся в соответствие логические переменные, обозначаемые латинскими буквами.

Если высказывание истинно, то ему соответствует значение логической переменной 1, если ложно – 0.

Тогда: $A = 0, B = 1$

Над высказываниями можно производить определенные логические операции, в результате которых получаются новые, составные высказывания.

Знак ↔ используется как символ метаязыка, заменяющий слова «тогда и только тогда, когда».

2) Логические операции над высказываниями

1. Логическое отрицание (инверсия)

Логическое отрицание образуется из высказывания с помощью добавления частицы «не» или использования оборота речи «*неверно, что…*».

Обозначения: $\neg A$; $\overline{A}$.

Отрицание высказывания А – высказывание, которое истинно, когда высказывание А ложно и наоборот.

Определяется следующей таблицей истинности:

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

2. Логическое умножение (конъюнкция)

Конъюнкция образуется соединением двух высказываний в одно с помощью союза

Обозначения: $A \cdot B$; $A \wedge B$; A&B.

Конъюнкцией высказываний А и В называется высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания А, В. Определяется следующей таблицей:

A	B	A&B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

3. Логическое сложение (дизъюнкция)

Дизъюнкция образуется соединением двух высказываний в одно с помощью союза «*или*».

Обозначение: $A \vee B$.

Дизъюнкцией высказываний А и В называется высказывание, которое ложна тогда и только тогда, когда ложны оба высказывания А, В. Определяется следующей таблицей:

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

4. Логическое следование (импликация)

Импликация образуется соединением двух высказываний в одно с помощью оборота речи «*если….., то…..»* («из … следует …»)

Обозначения: $A \rightarrow B$, $A \Rightarrow B$

Импликацией высказываний A, B называется высказывание, которое ложно тогда и только тогда, когда A – истина, а B – ложь.

A	B	A→B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

5. Логическое равенство (эквиваленция)

Эквиваленция образуется соединением двух высказываний в одно при помощи оборота речи «*…тогда и только тогда, когда…*».

Обозначение эквивалентности: A=B; A⇔B; A~B.

Эквиваленцией высказываний A, B называется высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда образующие ее высказывания A, B имеют одинаковые значения истинности. Определяется следующей таблицей:

A	B	A~B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Лекция № 3. Формулы логики. Таблица истинности и методика её построения

План

1. Формулы логики. Правила формализации высказываний.
2. Таблица истинности
3. Равносильность формул логики

1) Формулы логики. Правила формализации высказываний

С помощью логических операций над высказываниями из простых высказываний можно строить различные составные высказывания.

Всякое составное высказывание, которое может быть получено из простых высказываний с помощью логических операций, называется **формулой логики (логическим выражением)**.

В формулу логики входят *логические переменные*, обозначающие высказывания и *знаки логических операций*, обозначающие логические функции.

Формулы алгебры логики будем обозначать большими буквами латинского алфавита A, B, C и т.д.

Для записи составного высказывания на формальном языке нужно выделить простые высказывания и логические связи между ними.

Формализацией высказываний называют операцию замены высказывания естественного языка формулой логики.

Пример. Записать составное высказывание в виде формулы логики (формализовать высказывание):

1) Если я куплю яблоки или абрикосы, то приготовлю фруктовый пирог.

Обозначим простые высказывания буквами английского алфавита:
Буквой A - высказывание: "я куплю яблоки",

буквой B - высказывание: "я куплю абрикосы",
буквой C - высказывание: "приготовлю фруктовый пирог".

Если <u>я куплю яблоки</u> **или** <u>абрикосы</u>, **то** <u>приготовлю фруктовый пирог</u>
A B C

Высказывания A и B связаны союзом **или**, поэтому между ними будет операция дизъюнкция: $A \vee B$

Высказывания $A \vee B$ и C связаны конструкцией «**если … то**», поэтому между ними будет операция импликация $(A \vee B) \to C$.

Следовательно, высказывание "если я куплю яблоки или абрикосы, то приготовлю фруктовый пирог" формализуется в виде формулы:

$\mathbf{(A \vee B) \to C}$.

2. 45 кратно 3 и 41 не кратно 3

Обозначим простые высказывания буквами английского алфавита:
Буквой A - высказывание: "45 кратно 3",
буквой B - высказывание: "41 кратно 3".

<u>45 кратно 3</u> **и** <u>41</u> **не** <u>кратно 3</u>
A B

Высказывание B отрицается частицей **не,** поэтому к нему применена операция инверсия: $\overline{B}$

Высказывания A и $\overline{B}$ связаны союзом **и**, поэтому между ними будет операция конъюнкция $A \& \overline{B}$.

Следовательно, высказывание "45 кратно 3 и 41 не кратно 3" формализуется в виде формулы: $\mathbf{A \& \overline{B}}$

3. Путешествие на Марс не является дорогостоящим, и я полечу на Марс, или путешествие на Марс дорогостоящее и я не полечу на Марс.

Обозначим простые высказывания буквами английского алфавита:
Буквой A - высказывание: "Путешествие на Марс является дорогостоящим",
буквой B - высказывание: "я полечу на Марс".

В первой части предложения: «Путешествие на Марс **не** является дорогостоящим, **и** я полечу на Марс» имеется инверсия высказывания A и его конъюнкция с B: $\bar{A} \& B$

Во второй части предложения: «путешествие на Марс дорогостоящее **и** я **не** полечу на Марс» имеется инверсия высказывания B и его конъюнкция с A: $A \& \overline{B}$

Обе части предложения связаны союзом **или,** т.е. дизъюнкцией, поэтому получится формула:

$\mathbf{(\bar{A} \& B) \vee (A \& \overline{B})}$

2) Таблицы истинности

Для каждого логического выражения можно построить таблицу истинности.

<u>**Таблица истинности**</u> определяет истинность или ложность логического выражения при всех возможных комбинациях значений логических переменных.

Построение таблицы истинности:

1. Определяем количество строк = количеству комбинаций значений логических переменных = 2^n
   (n – количество логических переменных).
2. Определяем количество столбцов = количество логических переменных + количество логических операций.
3. Расставляем порядок выполнения операций:
   а) отрицание (если оно над одной переменной);
   б) конъюнкция;
   в) дизъюнкция;
   г) импликация;
   д) эквивалентность.

Если в выражении имеются скобки, то сначала выполняются действия в скобках. Отрицание над несколькими переменными также можно рассматривать как скобки.

4. Заполняем таблицу истинности, учитывая порядок выполнения операций:

Пример 1. Построить таблицу истинности для формулы логики $(A\&B)\rightarrow(B\vee\bar{A})$

Решение.

Определим количество строк и столбцов в таблице.

Т.к. в логическое выражение входят две переменные: А и В, то по формуле 2^2 получим 4 строки (+1 строка заголовков).

Количество столбцов равно количеству логических переменных (2) + количество операций (4), получим 6 столбцов.

Расставим порядок операций: $(A\overset{2}{\&}B)\overset{4}{\rightarrow}(B\overset{3}{\vee}\overset{1}{\bar{A}})$

Заполняем таблицу.

Первые два столбца для формулы, содержащей 2 переменные стандартно заполняются в следующем виде:

A	B	$\bar{A}$	A&B	B∨$\bar{A}$	(A&B)→(B∨$\bar{A}$)
0	**0**				
0	**1**				
1	**0**				
1	**1**				

При таком заполнении представлены все комбинации 0 и 1 для двух переменных (можно строки поменять местами, но именно такой порядок комбинаций считается стандартным при оформлении таблиц истинности).

Далее заполняем столбец $\bar{A}$. Для заполнения столбца $\bar{A}$ используем таблицу истинности для операции Инверсия. Если в столбце А стоит значение 0, то в $\bar{A}$ ставим значение 1 и наоборот.

(В таблице жирным курсивом выделен исходный столбец, над которым совершается операция. Просто жирным – столбец с результатом операции)

A	B	$\bar{A}$	A&B	B∨$\bar{A}$	(A&B)→(B∨$\bar{A}$)
0	0	**1**			
0	1	**1**			
1	0	**0**			
1	1	**0**			

Для заполнения столбца A&B используем таблицу истинности для операции Конъюнкция. В столбце A&B будет значение 1, только если в столбцах A и B одновременно значения 1.

A	B	$\bar{A}$	A&B	B∨$\bar{A}$	(A&B)→(B∨$\bar{A}$)
0	***0***	1	**0**		
0	***1***	1	**0**		
1	***0***	0	**0**		
1	***1***	0	**1**		

Для заполнения столбца B∨$\bar{A}$ используем таблицу истинности для операции Дизъюнкция. В столбце B∨$\bar{A}$ будет значение 0, только если в столбцах B и $\bar{A}$ одновременно значения 0.

A	B	$\bar{A}$	A&B	B∨$\bar{A}$	(A&B)→(B∨$\bar{A}$)
0	***0***	***1***	0	**1**	
0	***1***	***1***	0	**1**	
1	***0***	***0***	0	**0**	
1	***1***	***0***	1	**1**	

Далее заполняем столбец (A&B)→(B∨$\bar{A}$).
Для заполнения этого столбца используем таблицу истинности для операции Инверсия. В столбце будет значение 0, только если в посылке A&B будет 1, а в следствии B∨$\bar{A}$ будет 0.

A	B	$\bar{A}$	A&B	B∨$\bar{A}$	(A&B)→(B∨$\bar{A}$)
0	0	1	***0***	***1***	1
0	1	1	***0***	***1***	1
1	0	0	***0***	***0***	1
1	1	0	***1***	***1***	1

Таблица истинности заполнена.

Пример 2. Построить таблицу истинности для формулы логики

$(\overline{X} \vee Y) \leftrightarrow \overline{\overline{Y} \rightarrow X}$

Определим количество строк и столбцов в таблице.
Т.к. в логическое выражение входят две переменные: X и Y, то по формуле 2^2 получим 4 строки (+1 строка заголовков).
Количество столбцов равно количеству логических переменных (2) + количество операций (6), получим 8 столбцов.

Расставим порядок действий: $(\overset{1}{\overline{X}} \overset{2}{\vee} Y) \overset{6}{\leftrightarrow} \overset{5}{\overline{\overset{3}{\overline{Y}} \overset{4}{\rightarrow} X}}$

Здесь сначала выполним действия в первой скобке (1 и 2 действие). Потом действия под большим знаком отрицания, которое также играет роль второй скобки (3 и 4 действия). Затем выполним большое отрицание и эквиваленцию (5 и 6 действие).

Заполним таблицу:

X	Y	$\overline{X}$	$\overline{X} \vee Y$	$\overline{Y}$	$\overline{Y} \rightarrow X$	$\overline{\overline{Y} \rightarrow X}$	$(\overline{X} \vee Y) \leftrightarrow \overline{\overline{Y} \rightarrow X}$
0	0	1	1	1			
0	1	1	1	0			
1	0	0	0	1			
1	1	0	1	0			

Для заполнения следующего столбца $\overline{Y} \to X$ используем таблицу истинности для импликации. При этом 0 получится только в тех строках, в которых посылка $\overline{Y} = 1$, а следствие X = 0 *(такая комбинация будет в первой строке)*.

X	Y	$\overline{X}$	$\overline{X} \vee Y$	$\overline{Y}$	$\overline{Y} \to X$	$\overline{\overline{Y} \to X}$	$(\overline{X} \vee Y) \leftrightarrow \overline{\overline{Y} \to X}$
0	0	1	1	***1***	**0**		
0	1	1	1	***0***	**1**		
1	0	0	0	***1***	**1**		
1	1	0	1	***0***	**1**		

Столбец $\overline{\overline{Y} \to X}$ является инверсией (отрицанием) столбца $\overline{Y} \to X$, т.е. в $\overline{Y} \to X$ если была 1, то в столбце $\overline{\overline{Y} \to X}$ будет 0 и наоборот.

X	Y	$\overline{X}$	$\overline{X} \vee Y$	$\overline{Y}$	$\overline{Y} \to X$	$\overline{\overline{Y} \to X}$	$(\overline{X} \vee Y) \leftrightarrow \overline{\overline{Y} \to X}$
0	0	1	1	1	***0***	**1**	
0	1	1	1	0	***1***	**0**	
1	0	0	0	1	***1***	**0**	
1	1	0	1	0	***1***	**0**	

Для заполнения последнего столбца используем таблицу истинности для операции Эквиваленция. В столбце $(\overline{X} \vee Y) \leftrightarrow \overline{\overline{Y} \to X}$ будет значение 1, только если в столбцах $\overline{X} \vee Y$ и $\overline{\overline{Y} \to X}$ одинаковые значения истинности.

X	Y	$\overline{X}$	$\overline{X} \vee Y$	$\overline{Y}$	$\overline{Y} \to X$	$\overline{\overline{Y} \to X}$	$(\overline{X} \vee Y) \leftrightarrow \overline{\overline{Y} \to X}$
0	0	1	***1***	1	0	***1***	**1**
0	1	1	***1***	0	1	***0***	**0**
1	0	0	***0***	1	1	***0***	**1**
1	1	0	***1***	0	1	***0***	**0**

Таблица истинности заполнена.

3) Равносильность формул логики

Две формулы алгебры логики называют **равносильными**, если они принимают одинаковые логические значения на любом наборе значений элементарных высказывании, входящих в формулу.

Равносильность будем обозначать ≡

Пример 3. Определить равносильны ли высказывания:

- Не может быть, что Матроскин выиграл приз и отказался от него
- Матроскин не отказался от приза, или не выиграл его

Формализуем первое и второе высказывания. Получим:

$\overline{\boldsymbol{A} \,\&\, \boldsymbol{B}}$ – для первого высказывания, $\overline{\boldsymbol{A}} \vee \overline{\boldsymbol{B}}$ – для второго высказывания

Строим таблицу истинности для каждого высказывания.

A	B	A&B	$\overline{\boldsymbol{A} \,\&\, \boldsymbol{B}}$
0	0	0	**1**
0	1	0	**1**
1	0	0	**1**
1	1	1	**0**

A	B	$\overline{\boldsymbol{A}}$	$\overline{\boldsymbol{B}}$	$\overline{\boldsymbol{A}} \vee \overline{\boldsymbol{B}}$
0	0	1	1	**1**
0	1	1	0	**1**
1	0	0	1	**1**
1	1	0	0	**0**

Т.к. последние столбцы совпадают, то высказывания равносильны.

Лекция № 4. Законы алгебры логики. Равносильные преобразования

План

1. Понятия закона алгебры логики
2. Законы алгебры логики
3. Упрощение формул логики с помощью равносильных преобразований

1) Понятия закона алгебры логики

При решении многих логических задач часто приходится упрощать формулы, полученные при формализации их условий. Упрощение формул в алгебре высказываний производится на основе эквивалентных преобразований, опирающихся на основные логические законы.

Законы алгебры высказываний (алгебры логики) — это тавтологии.

Формула является **тождественно истинной (тавтологией)**, если она истинна при любых значениях входящих в неё переменных.

Формула является **тождественно ложной (противоречием)**, если она ложна при любых значениях входящих в неё переменных.

2) Законы алгебры логики

1. Закон тождества: $A = A$ (всякое высказывание тождественно самому себе). Сформулирован древнегреческим философом Аристотелем
2. Закон непротиворечия: $A\&\overline{A} = 0$ (высказывание не может быть одновременно истинным и ложным.
3. Закон исключенного третьего: $A\vee\overline{A} = 1$ (высказывание может быть или истинным или ложным).
4. Закон двойного отрицания: $\overline{\overline{A}} = A$.
5. Законы коммутативности: $AB \equiv BA$ (переместительные законы)
$$A\vee B \equiv B\vee A$$
6. Законы дистрибутивности: $A\vee(BC) = (A\vee B)(A\vee C)$ (распределительные законы)
$$A(B\vee C) = AB \vee AC$$
7. Ассоциативные законы: $A\vee(B\vee C) = (A\vee B)\vee C$ (сочетательные законы)
$$A(BC) = (AB)C$$
8. Законы идемпотентности: $A*A \equiv A$
$$A\vee A \equiv A$$
9. Законы де Моргана: $\overline{A\vee B} = \bar{A}\&\bar{B}$
$$\overline{A\&B} = \bar{A}\vee\bar{B}$$
10. $A\to B=\bar{A}\vee B$ (снятие импликации)
11. $A\leftrightarrow B=AB\vee\bar{A}\bar{B}$ (снятие эквиваленции) или $A\leftrightarrow B = (A\vee\overline{B})(\overline{A}\vee B)$
12. Формулы склеивания: $AB\vee A\bar{B}=A$
$$(A\vee B)(A\vee\bar{B})=A$$
13. Формулы поглощения: $A\vee AB=A$
$$A(A\vee B)=A$$
$$A\vee(\bar{A}B)=A\vee B$$
$$A(\bar{A}\vee B)=A\&B$$
14. Свойства констант: $A\vee 1 = 1 \qquad A\&1 = A$
$$A\vee 0 = A \qquad A\&0 = 0$$

Используя законы логики можно часть формулу или всю формулу заменить равносильной ей. Такие преобразования формул называются равносильными.

3) Упрощение формул логики с помощью равносильных преобразований

Задание 1. Применяя равносильные преобразования по законам алгебры логики, доказать тождественную истинность формул.

1. $X \to X \vee Y$

В формулах, содержащих знак импликации, обычно первым действием необходимо снять импликацию. Для этого используем закон снятия импликации.

$X \to X \vee Y = \bar{X} \vee X \vee Y =$

Далее необходимо сгруппировать слагаемые так, чтобы потом можно было применить один из законов: $=(\bar{X} \vee X) \vee Y =$

В скобках получился закон исключенного третьего, поэтому заменяем скобку на единицу: $= 1 \vee Y$

Используя одно из свойств констант, получаем в итоге единицу.

Целиком процесс решения без объяснения записывается в виде:

$$\mathbf{X \to X \vee Y = \bar{X} \vee X \vee Y = (\bar{X} \vee X) \vee Y = 1 \vee Y = 1}$$

Т.к. в результате равносильных преобразований получена 1, то формула является тождественно истинной.

2. $X \& Y \to X$

При решении данного примера сначала убираем знак импликации. При этом в посылке импликации стоит не одна переменная, а конъюнкция X&Y, поэтому инверсию применяем целиком к X&Y.

$X \& Y \to X = \overline{X \& Y} \vee X =$

Далее необходимо убрать отрицание над несколькими переменными, используем один из законов де Моргана: $= \bar{X} \vee \bar{Y} \vee X =$

Далее группируем слагаемые (при этом их можно переставлять местами) и применяем закон исключенного третьего и операцию к константой: $=(\bar{X} \vee X) \vee \bar{Y} = 1 \vee \bar{Y} = 1$

Целиком процесс решения без объяснения записывается в виде:

$$\mathbf{X \& Y \to X = \overline{X \& Y} \vee X = \bar{X} \vee \bar{Y} \vee X = (\bar{X} \vee X) \vee \bar{Y} = 1 \vee \bar{Y} = 1}$$

Т.к. в результате равносильных преобразований получена 1, то формула является тождественно истинной.

Задание 2. Упростить формулу логики

1. $XY \vee X\bar{Y}Z \vee \bar{Y}X\bar{Z} \vee X\bar{Z}$

Сгруппируем слагаемые так, чтобы можно было вынести за скобки одинаковые множители (второй распределительный закон).

$XY \vee X\bar{Y}Z \vee \bar{Y}X\bar{Z} \vee X\bar{Z} = XY \vee (X\bar{Y}Z \vee \bar{Y}X\bar{Z}) \vee X\bar{Z} = XY \vee X\bar{Y}(Z \vee \bar{Z}) \vee X\bar{Z} =$

В скобках используем закон исключенного третьего, а далее операцию с константами: $= XY \vee X\bar{Y} \cdot 1 \vee X\bar{Z} = XY \vee X\bar{Y} \vee X\bar{Z}$

Далее вынесем X за скобку (второй распределительный закон): $= X(Y \vee \bar{Y} \vee \bar{Z}) =$

В скобках получим $Y \vee \bar{Y}$ = 1

$= X(1 \vee \bar{Z}) =$

Применяем операции с константами и получаем результат. $= X \cdot 1 = X$

Целиком процесс решения без объяснения записывается в виде:

$\boldsymbol{XY \vee X\bar{Y}Z \vee \bar{Y}X\bar{Z} \vee X\bar{Z} = XY \vee (X\bar{Y}Z \vee \bar{Y}X\bar{Z}) \vee X\bar{Z} = XY \vee X\bar{Y}(Z \vee \bar{Z}) \vee X\bar{Z} = XY \vee X\bar{Y} \vee X\bar{Z} = X(Y \vee \bar{Y} \vee \bar{Z}) = X(1 \vee \bar{Z}) = X \cdot 1 = X}$

2. XY(X↔Y)

Если в формуле имеется знак эквиваленции, то его также как импликацию необходимо снять в первую очередь:

XY(X↔Y)= XY(XY$\vee\bar{X}\bar{Y}$) =

Далее раскрываем скобки (второй распределительный закон) = XYXY ∨ XY$\bar{X}\bar{Y}$ =

В первом слагаемом применяем первый закон идемпотентности (формулы 8), во втором слагаемом закон непротиворечия.

И далее операция с константой: = XY ∨ 0 = XY

XY(X↔Y) = XY(X↔Y)= XY(XY$\vee\bar{X}\bar{Y}$) = = XYXY ∨ XY$\bar{X}\bar{Y}$ = XY ∨ 0 = = XY

3. $y \vee \overline{x \vee y} \vee \overline{\bar{x}\bar{y}}$

В формуле нет знаков импликации и эквиваленции, но имеется отрицание над несколькими переменными. Избавимся от него по законам де Моргана:

$y \vee \overline{x \vee y} \vee \overline{\bar{x}\bar{y}}$ = $y \vee \bar{x}\,\bar{y} \vee \bar{\bar{x}} \vee \bar{\bar{y}}$ =

Убираем двойное отрицание = $y \vee \bar{x}\,\bar{y} \vee x \vee y$ =

Используя закон идемпотентности, оставляем одну переменную y

= $y \vee \bar{x}\,\bar{y} \vee x$ =

Группируем в скобки второе и третье слагаемое: = $y \vee (\bar{x}\,\bar{y} \vee x)$ =

В скобках используем первый распределительный закон: $=$ $y \vee (\bar{x} \vee x)(\bar{y} \vee x)$ =

Далее закон исключенного третьего и действия с константами:

$y \vee 1(\bar{y} \vee x)$ = $y \vee (\bar{y} \vee x) = (y \vee \bar{y}) \vee x = 1 \vee x = 1$

Целиком процесс решения без объяснения записывается в виде:

$\boldsymbol{y \vee \overline{x \vee y} \vee \overline{\bar{x}\bar{y}} = y \vee \bar{x}\,\bar{y} \vee \bar{\bar{x}} \vee \bar{\bar{y}} = y \vee \bar{x}\,\bar{y} \vee x \vee y = y \vee \bar{x}\,\bar{y} \vee x = y \vee (\bar{x}\,\bar{y} \vee x) = y \vee (\bar{x} \vee x)(\bar{y} \vee x) = y \vee 1(\bar{y} \vee x) = y \vee (\bar{y} \vee x) = (y \vee \bar{y}) \vee x = 1 \vee x = 1}$

Лекция № 5. Приложение алгебры логики к логико-математической практике и построению логических схем

План

1. Приложение алгебры логики к логико-математической практике
2. Логические основы построения ЭВМ
3. Примеры построения логических схем

1) Приложение алгебры логики к логико-математической практике

– Язык алгебры логики применяется при символической записи теорем

– Операции алгебры логики (импликация, отрицание, эквиваленция) используются для формулировки и доказательства прямой и обратных теорем, необходимых и достаточных условий, противоположной и обратно противоположной теорем.

Рассмотрим примеры формулировок теорем, содержащих операции алгебры логики.

1. Прямая и обратная теоремы

Многие математические теоремы имеют структуру, выражаемую формулой $X \rightarrow Y$. Утверждение X называется условием теоремы, а утверждение Y — ее заключением.

Например:

1) «Если в четырехугольнике все стороны равны между собой (A), то его диагонали перпендикулярны (B)». Символическая запись этой теоремы: $A \rightarrow B$.

2) «Если один из углов треугольника прямой (A2), то квадрат длины одной из сторон этого треугольника равен сумме квадратов длин двух других его сторон (B2)». $A2 \rightarrow B2$

Далее, если некоторая теорема имеет форму $X \rightarrow Y$, утверждение $Y \rightarrow X$ называется обратным для данной теоремы. Это утверждение может быть справедливым, и тогда оно называется теоремой, обратной для теоремы $X \rightarrow Y$, которая, в свою очередь, называется прямой теоремой.

Если же утверждение $Y \rightarrow X$ не выполняется, то говорят, что обратная теорема для теоремы $X \rightarrow Y$ неверна.

Так, для теоремы $A \rightarrow B$ из первого примера обратная теорема неверна, а для теоремы $A2 \rightarrow B2$ справедлива обратная теорема $B2 \rightarrow A2$

Таким образом, доказательство прямой теоремы не дает оснований для вывода о том, что и обратная теорема также верна. Обратная теорема требует специальной проверки. Это обусловлено тем, что формулы $X \rightarrow У$ и $У \rightarrow X$, выражающие структуры прямой и обратной теорем, не равносильны, в чем мы убедились на приведенных примерах. Их неравносильность можно усмотреть также из таблиц истинности данных формул.

2. Необходимые и достаточные условия

Если некоторая математическая теорема имеет структуру, выражаемую формулой $X \rightarrow Y$, то высказывание У называется необходимым условием для высказывания X (другими словами, если X истинно, то Y с необходимостью должно быть также истинным), а высказывание X называется достаточным условием для высказывания У (другими словами, для того чтобы У было истинным, достаточно, чтобы истинным было высказывание X).

Рассмотрим 1 пример: $A \rightarrow B$. Необходимым условием равенства в четырехугольнике всех сторон является перпендикулярность его диагоналей. Иначе говоря, достаточным условием для перпендикулярности диагоналей четырехугольника является равенство всех его четырех сторон.

Если справедливы утверждения $X \rightarrow Y$ и $Y \rightarrow X$, т.е. справедливо $X \leftrightarrow Y$, то считают, что X — необходимое и достаточное условие для Y, и, наоборот, что Y — необходимое и достаточное условие для X.

3. Противоположная и обратная противоположной теоремы

Для теоремы, сформулированной в виде импликации X→Y, кроме обратного утверждения Y→X можно сформулировать противоположное утверждение. Им называется утверждение вида — $\bar{X}\to\bar{Y}$

Утверждение, противоположное данной теореме, может быть также теоремой, т. е. быть истинным высказыванием, но может таковым и не быть. Это следует из того, что формулы X→Y и $\bar{X}\to\bar{Y}$не являются равносильными, в чем нетрудно убедиться, составив таблицы истинности данных формул.

Пример. 1) «Если в четырехугольнике все стороны равны, то его диагонали перпендикулярны».

Противоположное утверждение – $\bar{A}\to\bar{B}$: «Если в четырехугольнике все стороны не равны, то его диагонали не перпендикулярны». Последнее утверждение неверно, т.е. теоремой не является.

2) «Если сумма цифр натурального числа делится на три, то и само число делится на три».

Противоположное утверждение для этой теоремы также справедливо, т.е. является теоремой, противоположной данной: «Если сумма цифр натурального числа не делится на три, то и само число не делится на три».

Теорема обратная противоположной: $\bar{Y}\to\bar{X}$

2) Логические основы построения ЭВМ

Над применением логики в технике учёные и инженеры задумывались давно. В 1950 году Михаил Александрович Гаврилов (1903-1079) опубликовал работу о теории релейно-контактных схем.

В этой теории было однозначно показано соответствие между функциями алгебры логики и параллельными/последовательными электрическими схемами, содержащими переключатели или реле**.**

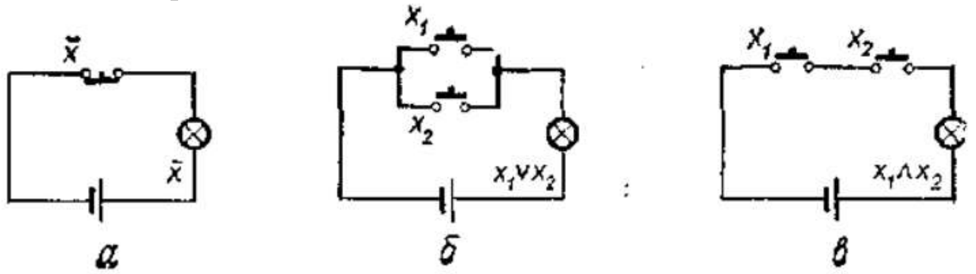


Рис. 1. Переключательные схемы, соответствующие операциям отрицания (а), дизъюнкции *(б)* и конъюнкции (в).

Первые компьютеры работали на основе таких переключателей, которые могли пропускать или не пропускать электрический ток. Соответственно электрический сигнал передавался либо как единица, либо как ноль.

Затем элементной базой компьютеров стали громоздкие электронные лампы, потреблявшие огромное количество электроэнергии. Эти лампы тоже могли пропускать ток только в одном направлении. На смену электронным лампам пришли полупроводниковые транзисторы, изобретенные в 1947 году. Транзистор позволял усиливать электрические сигналы и стал удобной, дешевой и эффективной заменой вакуумным приборам.

И затем транзисторы послужили основой для изобретения микросхем. Годом рождения полупроводниковой микросхемы, принято считать, 1959 год. Авторами изобретения, радикально изменившего образ жизни человечества, стали американские инженеры Джек Килби, работавший в то время в компании Texas Instruments, и будущий основатель корпорации Intel Роберт Нойс.

Вся теория, изложенная для контактных схем, была перенесена на электронные микросхемы.

В основе обработки компьютером информации лежит алгебра логики, разработанная Дж. Булем. Все электронные схемы компьютера могут быть реализованы с помощью логических элементов И, ИЛИ, НЕ.

Элементы, реализующие базовые логические операции, называются базовыми логическими элементами или **вентилями**.

Логический элемент компьютера (вентиль) – это часть электронной логической схемы, которая реализует базовую логическую операцию (конъюнкцию, дизъюнкцию, отрицание).

Вентиль преобразует множество входных логических сигналов в выходной логический сигнал.

Примерами электронных логических схем служат обыкновенные микросхемы, которые присутствуют в компьютерах и электробытовых приборах.

Существуют различные физические способы кодирования двоичной информации, но чаще всего единица кодируется более высоким уровнем напряжения, чем ноль. Если элемент имеет входное напряжение в пределах от 0 до 0,4 В, то оно рассматривается как логический ноль; если напряжение в пределах от 0,7 до 1,5 В, то как логическая 1.

Виды вентилей

Логический элемент	*Обозначение*	*Условие прохождения сигнала*
Конъюнктор	$\boxed{\&}$	На выходе конъюнктора значение «1» будет тогда и только тогда, когда на всех входах будут «1».
Дизъюнктор	$\boxed{1}$	На выходе дизъюнктора значение «1» будет тогда и только тогда, когда хотя бы на одном входе будет «1».
Инвертор		Если на входе инвертора «0», то на выходе будет «1» и наоборот.

Из вентилей составляют более сложные схемы (полусумматоры, сумматоры, триггеры) которые позволяют выполнять арифметические операции и хранить информацию. Сумматоры и триггеры входят в состав микропроцессора, оперативной памяти и других микросхем компьютера.

Алгоритм построения логических схем:

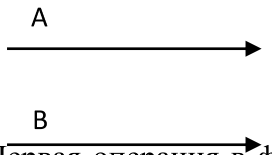
1. Определить порядок логических операций.
2. Определить число логических переменных.
3. Изобразить для каждой логической операции соответствующий ей вентиль и соединить вентили в порядке выполнения логических операций.

3) Примеры построения логических схем

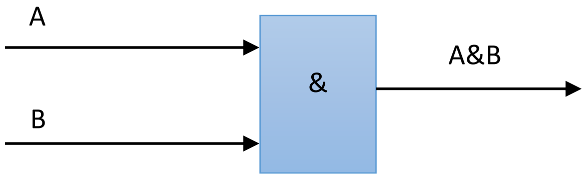
Задание 1. Построить логическую схему для формулы логики **F=A∨B&A**

Определим порядок выполнения логических операций: $F=A\overset{2}{\vee}B\overset{1}{\&}A$

В данной формуле логики 2 переменных (А и В), следовательно, в логической схеме будет 2 входных сигнала. Сначала изображаем стрелками 2 входных сигнала.

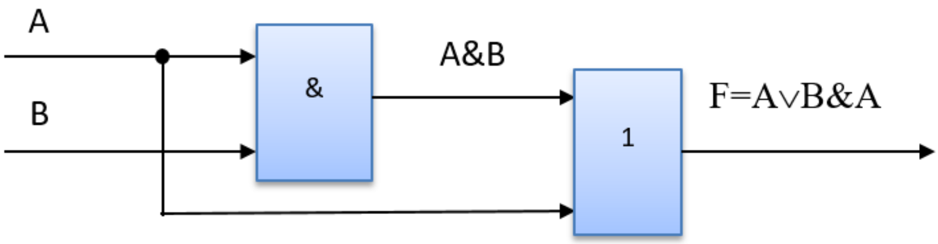


Первая операция в формуле конъюнкция, значит входные сигналы сначала идут на логический элемент конъюнктор.



Вторая операция – дизъюнкция между сигналом А и сигналом, вышедшем из конъюнктора. Т.к. сигнал А идет на два вентиля, то для него рисуем разветвление, которое на схеме указывается черной точкой.

Рисуем дизъюнктор. На выходе дизъюнктора получим выходной сигнал.



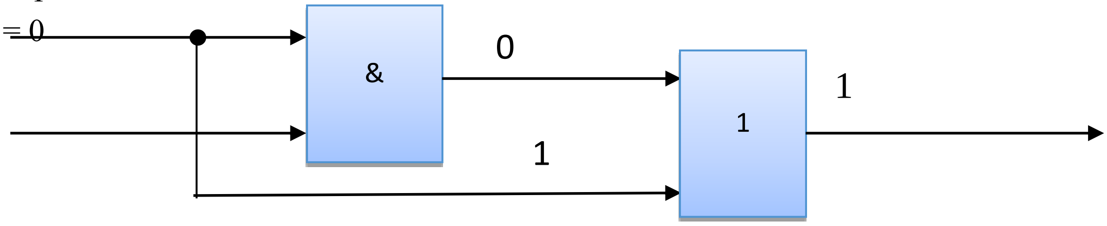
Определить значение выходного сигнала, если на входе будет A = 1, B = 0.

На вход конъюнктора поступают 0 и 1, поэтому на выходе будет 0.

На вход дизъюнктора поступают 0 и 1, поэтому на выходе будет 1.

А = 1

В = 0

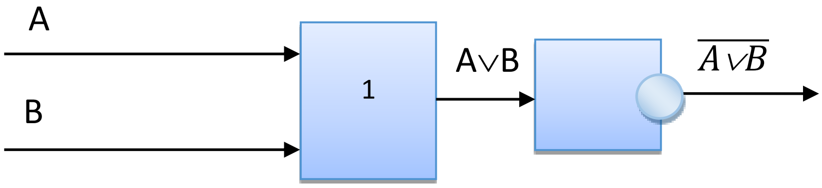


Задание 2. Построить логическую схему для формулы логики $F = A\&B\vee\overline{(B\vee A)}$

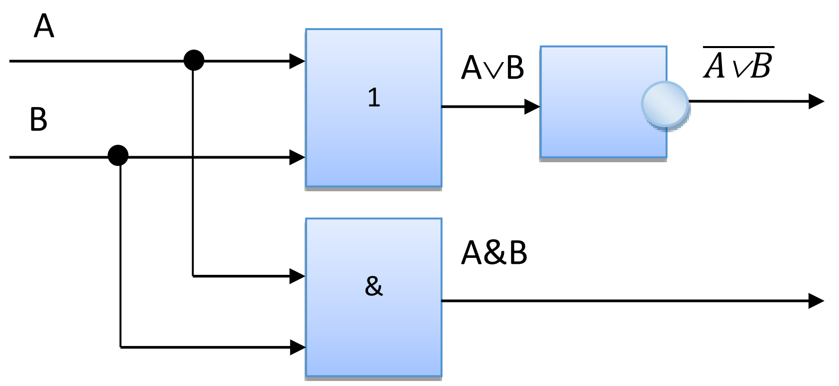
Определим порядок выполнения логических операций: $F=A\overset{3}{\&}B\overset{4}{\vee}\overset{2}{\overline{(B\overset{1}{\vee}A)}}$

В данной формуле логики 2 переменных (А и В), следовательно, в логической схеме будет 2 входных сигнала.

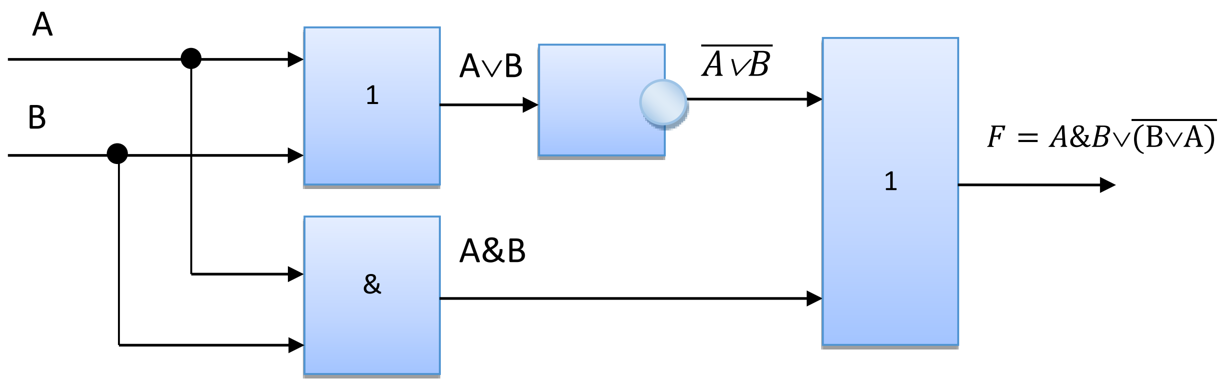
Первым действием сигналы идут на дизъюнктор. Второе действие в формуле – инверсия. Сигнал, вышедший из дизъюнктора, идет на инвертор.



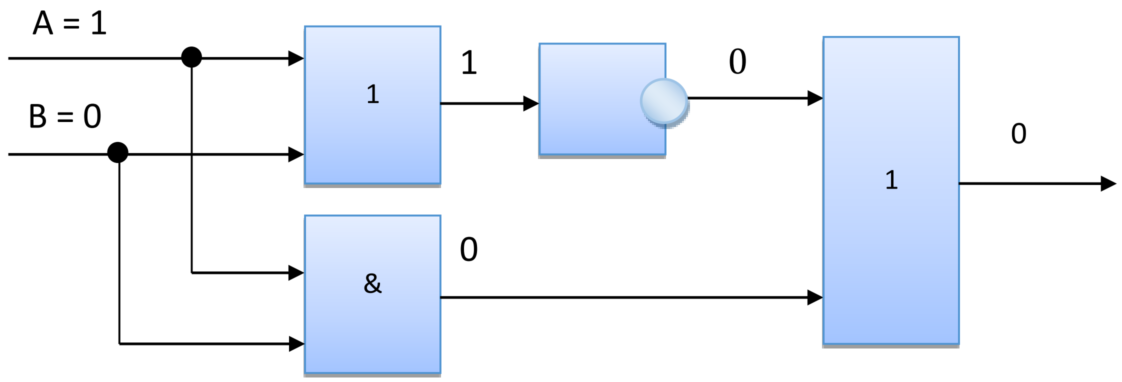
Третье действие – конъюнкция. На конъюнктор идут сигналы А и В.



Четвертое действие – дизъюнкция. Сигналы $\overline{A \vee B}$ и A&B идут на дизъюнктор.
Следовательно, в итоге получается следующая схема:



Определить значение выходного сигнала, если на входе будет A = 1, B = 0.



Лекция № 6. Решение логических задач

План

1. Табличный способ решения логических задач
2. Аналитический способ решения логических задач

Разнообразие логических задач очень велико. Способов их решения тоже немало. Но наибольшее распространение получили следующие три способа решения логических задач: ***табличный; аналитический; с помощью рассуждений***.

1) **Табличный способ** решения логических задач

При использовании этого способа условия, которые содержит задача, и результаты рассуждений фиксируются с помощью специально составленных таблиц.

Ячейки таблицы заполняются цифрами 0 и 1 в зависимости от того, ложно или истинно соответствующее высказывание.

Пример 1. В симфонический оркестр приняли на работу трёх музыкантов: Александра, Михаила и Романа, умеющих играть на скрипке, флейте, альте, кларнете, гобое и трубе.

Известно, что:

1. Михаил самый высокий;
2. играющий на скрипке меньше ростом играющего на флейте;
3. играющие на скрипке и флейте и Александр любят пиццу;
4. когда между альтистом и трубачом возникает ссора, Михаил мирит их;
5. Александр не умеет играть ни на трубе, ни на гобое.

На каких инструментах играет каждый из музыкантов, если каждый владеет двумя инструментами?

Решение

Составим таблицу и отразим в ней условия задачи, заполнив соответствующие клетки цифрами 0 и 1 в зависимости от того, ложно или истинно соответствующее высказывание.

Так как музыкантов трое, инструментов шесть и каждый владеет только двумя инструментами, получается, что каждый музыкант играет на инструментах, которыми остальные не владеют.

Из условия 4 следует, что Михаил не играет ни на альте, ни на трубе, а из условий 3 и 5, что Александр не умеет играть на скрипке, флейте, трубе и гобое. Следовательно, инструменты Александра — альт и кларнет. Занесем это в таблицу, а оставшиеся клетки столбцов "альт" и "кларнет" заполним нулями:

	скрипка	флейта	альт	кларнет	гобой	труба
Александр	0	0	1	1	0	0
Михаил			0	0		0
Роман			0	0		

Из таблицы видно, что на трубе может играть только Роман.

Из условий 1 и 2 следует, что Михаил не скрипач. Так как на скрипке не играет ни Александр, ни Михаил, то скрипачом является Роман. Оба инструмента, на которых играет Роман, теперь определены, поэтому остальные клетки строки "Роман" можно заполнить нулям. Из таблицы видно, что играть на флейте и на гобое может только Михаил.

	скрипка	флейта	альт	кларнет	гобой	труба
Александр	0	0	1	1	0	0
Михаил	0	1	0	0	1	0
Роман	1	0	0	0	0	1

Пример 2. Три дочери писательницы Дорис Кей — Джуди, Айрис и Линда, тоже очень талантливы. Они приобрели известность в разных видах искусств — пении, балете и кино. Все они живут в разных городах, поэтому Дорис часто звонит им в Париж, Рим и Чикаго.

Известно, что:

1. Джуди живет не в Париже, а Линда — не в Риме;
2. парижанка не снимается в кино;
3. та, кто живет в Риме, певица;
4. Линда равнодушна к балету.

Где живет Айрис, и какова ее профессия?

Решение.

Составим таблицу и отразим в ней условия 1 и 4, заполнив клетки цифрами 0 и 1 в зависимости от того, ложно или истинно соответствующее высказывание:

Париж	Рим	Чикаго		Пение	Балет	Кино
0			Джуди			
			Айрис			
	0		Линда		0	

Далее рассуждаем следующим образом. Так как Линда живет не в Риме, то, согласно условию 3, она не певица. В клетку, соответствующую строке "Линда" и столбцу "Пение", ставим 0.

Из таблицы сразу видно, что Линда киноактриса, а Джуди и Айрис не снимаются в кино.

Париж	Рим	Чикаго		Пение	Балет	Кино
0			Джуди			0
			Айрис			0
	0		Линда	0	0	1

Согласно условию 2, парижанка не снимается в кино, следовательно, Линда живет не в Париже. Но она живет и не в Риме. Следовательно, Линда живет в Чикаго. Так как Линда и Джуди живут не в Париже, там живет Айрис. Джуди живет в Риме и, согласно условию 3, является певицей. А так как Линда киноактриса, то Айрис балерина.

В результате постепенного заполнения получаем следующую таблицу:

Париж	Рим	Чикаго		Пение	Балет	Кино
0	0	1	Джуди	1	0	0
1	0	0	Айрис	0	1	0
0	0	1	Линда	0	0	1

Ответ. Айрис балерина. Она живет в Париже.

2) Аналитический способ решения логических задач

Алгоритм:

1. Формализуем условие задачи, получаем одну или несколько формул логики.

2. Упрощаем полученные формулы и из полученного результата делаем вывод о решении задачи.

Пример 3. Намечаются экскурсии в три города Астрахань, Волгоград и Саратов. Руководитель фирмы сказал: «Неверно, что если будет экскурсия в город Волгоград, то не будет экскурсии в город Саратов. Если будет экскурсия в город Саратов, то не будет экскурсии в город Астрахань». В какие города будет проводиться экскурсия?

Решение.

Введем систему обозначений:

высказывание А – будет экскурсия в город А,
высказывание В – будет экскурсия в город В,
высказывание С – будет экскурсия в город С.
Формализуем условие задачи и получим логическую формулу:

$$\left(\overline{B \to \bar{C}}\right)\&(C \to \bar{A})$$

Упростим формулу, используя равносильные преобразования

$\left(\overline{B \to \bar{C}}\right)(C \to \bar{A}) = (\overline{\bar{B} \vee \bar{C}})\ (\bar{C} \vee \overline{A})$ = (BC)($\bar{C} \vee \overline{A})$ = BC$\bar{C}$ $\vee$BC$\bar{A}$ = 0 $\vee$BC$\bar{A}$ = BC$\bar{A}$

Ответ. не будет экскурсии в город А, а будут две экскурсии в города В и С.

Пример 4. Трое друзей, болельщиков автогонок "Формула-1", спорили о результатах предстоящего этапа гонок.

1. Вот увидишь, Шумахер не придет первым, — сказал Джон. Первым будет Хилл.
2. Да нет же, победителем будет, как всегда, Шумахер, — воскликнул Ник. — А об Алези и говорить нечего, ему не быть первым.
3. Питер, к которому обратился Ник, возмутился: Хиллу не видать первого места

По завершении этапа гонок оказалось, что каждое из предположений двоих друзей подтвердилось, а предположения третьего из друзей оказались неверны. Кто выиграл этап гонки?

Решение. Введем обозначения для логических высказываний:

А — победит Шумахер;
В — победит Хилл;
С — победит Алези.

Формализуем каждое из высказываний в условии задачи:

1. $\bar{A}B$ (сказал Джон)
2. $A\bar{C}$ (сказал Ник)
3. $\bar{B}$ (сказал Питер)

Т.к. каждое из предположений двоих друзей подтвердилось, а предположения третьего из друзей оказались неверны, то возможно 3 случая:

1 случай: Джон и Ник правы, Питер не прав
2 случай: Джон и Питер правы, Ник не прав
3 случай: Ник и Питер правы, Джон не прав

Если высказывание друзей оказалось правдивым, то возьмем его само. Если ложным, то его отрицание. Составим конъюнкции для каждого случая.

1 случай: Джон и Ник правы, Питер не прав
$\bar{A}B\ A\bar{C}\ \bar{\bar{B}}$
2 случай: Джон и Питер правы, Ник не прав
$\bar{A}B\bar{B}\ \overline{A\bar{C}}$
3 случай: Ник и Питер правы, Джон не прав
$A\bar{C}\ \bar{B}\overline{\bar{A}B}$

Упростим каждую из получившихся формул:

1) $\bar{A}B \quad A\bar{C} \quad \bar{\bar{B}} = (\bar{A}A)B\bar{C}B = 0 \cdot B\bar{C}B = 0$ (ответ 0 показывает, что наше первое предположение неверно)

2) $\bar{A}B\bar{B}\,\overline{A\bar{C}} = \bar{A}\cdot 0\cdot\overline{A\bar{C}} = 0$ (ответ 0 показывает, что наше второе предположение неверно)

3) $A\bar{C}\,\bar{B}\overline{\bar{A}B} = A\bar{C}\bar{B}\,(\bar{\bar{A}}\vee\bar{B}) = A\bar{C}\bar{B}\,(A\vee\bar{B}) = A\bar{C}\bar{B}A \vee A\bar{C}\bar{B}\,\bar{B} = A\bar{C}\bar{B} \vee A\bar{C}\bar{B} = A\bar{C}\bar{B}$

На основании последнего ответа получаем:

Ответ: А – победит Шумахер; Хилл и Алези не победят

Лекция № 7. Понятие булевой функции. Способы задания булевой функции

План

1. Понятие булевой функции
2. Способы заданий булевой функции
3. Булевы функции одной переменной
4. Булевы функции двух переменных

1) Понятие булевой функции

Любое составное высказывание можно рассматривать как логическую функцию $f(x_1, x_2, \dots x_n)$, аргументами которой являются логические переменные $x_1, x_2, \dots x_n$ (простые высказывания). Сама функция и ее аргументы могут принимать только два различных значения: истина (1) или ложь (0).

Мы уже рассмотрели некоторые функции двух аргументов: например, логическое сложение $F(A,B)=A\vee B$. Построим таблицу истинности для логического сложения.

B^2 **B**

a= x_1	B= x_2	$a\vee b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

f

Т.е. получили некоторое отображение набора нулей и единиц в новый набор нулей и единиц.

Булева функция – это функция, которая произвольному набору нулей и единиц $(x_1, x_2, \dots x_n)$ ставит в соответствие значение $f(x_1, x_2, \dots x_n)$, принадлежащее интервалу (0,1).

Обозначим множество нулей и единиц {0, 1} буквой B.

Отображение f: $B^n \rightarrow B$ называется булевой функцией n переменных

Двоичный набор $(x_1, x_2, \dots x_n)$ называется двоичным или булевым вектором размерности n.

Множество булевых функций с определенными на нем операциями отрицания, конъюнкции и дизъюнкции называется **булевой алгеброй.**

2) Способы задания булевой функции

1. **Табличный способ задания функции** (пример выше)
   F = (0111)

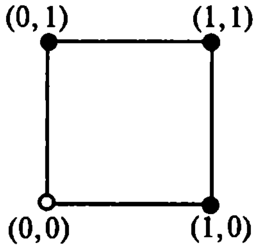
2. **Аналитический способ задания функции**

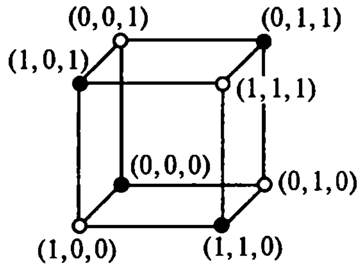
При **аналитическом способе** булева функция задается формулами, т. е. аналитическими выражениями, построенными на основе операций булевой алгебры.

3. Геометрический способ задания булевой функции – булев куб

Совокупность всех булевых векторов размерности n называется единичным булевым кубом размерностью B^n.

Булев куб размерности 1





Булев куб размерности 2 Булев куб размерности 3

Два булевых вектора называются **соседними**, если они отличаются только одной координатой.

Например, (001) и (000)

Два булева вектора называются **противоположными**, если любая из их координат принимает противоположные значения.

Например, (0101) и (1010)

3) Булевы функции одной переменной

X	$f_1 = 0$ – «тождественный ноль»	$f_2 = x$ – «тождественная функция»	$f_3 = \bar{x}$ – «отрицание, инверсия»	$f_4 = 1$ – «тождественная единица»
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

4) Булевы функции двух переменных

X	Y	F_1 0	F_2 &	F_3 $\overline{x \to y}$	F_4 x	F_5 $\overline{y \to x}$	F_6 y	F_7 $\oplus$	F_8 $\vee$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

X	Y	F_9 $\downarrow$	F_{10} $\leftrightarrow$	F_{11} $\bar{y}$	F_{12} $y \to x$	F_{13} $\bar{x}$	F_{14} $x \to y$	F_{15} $\vert$	F_{16} 1
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Сумма по модулю два или строгая дизъюнкция - f = (0110).
Строгая дизъюнкция $f(x,y) = x \oplus y$ равна нулю при совпадающих аргументах.

Стрелка Пирса - f = (1000).

Стрелка Пирса f(x,y) = x $\downarrow$ y равна 1, если оба аргумента равны 0.

Штрих Шеффера - f = (1110).
Штрих Шеффера f(x,y) = x|y равен 0, если оба аргумента равны 1.

Лекция № 8. Дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы (ДНФ и КНФ)

План

1. Элементарные конъюнкция и дизъюнкция
2. Дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы
3. Алгоритм для приведения высказываний к нормальной форме

1) Элементарные конъюнкция и дизъюнкция

Элементарной (простой) конъюнкцией называется конъюнкция одной или нескольких переменных, при этом каждая переменная встречается не более одного раза (либо сама, либо ее отрицание).

Примеры.

1. $\bar{X}\&Y$
2. X&Z
3. X&$\bar{Y}$&$\bar{X}$ не элементарная конъюнция
4. X$\vee$Y&X – не элементарная конъюнкция

Элементарной (простой) дизъюнкцией называется дизъюнкция одной или нескольких переменных, при этом каждая переменная входит не более одного раза (либо сама, либо ее отрицание).

Примеры.

1. $\bar{X} \vee Y$
2. X$\vee\bar{Z}$
3. X $\vee\bar{Y} \vee\bar{X}$– не элементарная дизъюнкция
4. X$\vee$Y&X – не элементарная дизъюнкция

2) Дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы

Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) называется дизъюнкция простых конъюнкций.

Примеры.

1. (X&Y)$\vee$(Y&$\bar{Z}$)
2. ($\bar{X}\&Y$)$\vee$(X&Y&$\bar{Z}$)

Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) называется конъюнкция простых дизъюнкций.

Примеры.

1. (X$\vee$Y$\vee\bar{Z}$)&(X$\vee$Y)
2. (X$\vee$Z$\vee$Y)&($\bar{Z}\vee$Y)

Для любой формулы путем равносильных преобразований можно получить ее ДНФ и КНФ, и не одну.

3) Алгоритм для приведения высказываний к нормальной форме:

1. Выразить все логические операции в формуле через дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание *(вспомните законы логики для выражения импликации и эквиваленции)*.
2. Используя законы Де Моргана, убрать отрицание над несколькими переменными.
3. Избавиться от знаков двойного отрицания.

4. Применить законы логики (чаще всего распределительные), так чтобы получился один из видов нормальной формы.

ДНФ: $\boxed{\&} \vee \boxed{\&}$

КНФ: $(\boxed{\vee})\&(\boxed{\vee})$

Задание: Привести формулы логики к ДНФ и КНФ

a. $(X\rightarrow Y)\rightarrow Z = (\overline{\overline{X}\vee Y})\vee Z = X\overline{Y}\vee Z$ – ДНФ

$(X\rightarrow Y)\rightarrow Z = (\overline{\overline{X}\vee Y})\vee Z = X\overline{Y}\vee Z = (X\vee Z)(\overline{Y}\vee Z)$ - КНФ

b. $(\overline{X\vee Z})(X\rightarrow Y) = \overline{X}\overline{Z}(\overline{X}\vee Y) = \overline{X}\overline{Z}\overline{X}\vee\overline{X}\overline{Z}Y = \overline{Z}\overline{X}\vee\overline{X}\overline{Z}Y$ - ДНФ

$(\overline{X\vee Z})(X\rightarrow Y) = \overline{X}\overline{Z}(\overline{X}\vee Y) = \overline{X}\overline{Z}\overline{X}\vee\overline{X}\overline{Z}Y = \overline{Z}\overline{X}\vee\overline{X}\overline{Z}Y = \overline{Z}\overline{X}$ – КНФ

c. $(X\rightarrow Y)((\overline{Y}\rightarrow Z)\rightarrow\overline{X}) = (\overline{X}\vee Y)(\overline{\overline{Y}\vee Z}\vee\overline{X}) = (\overline{X}\vee Y)(\overline{Y}\overline{Z}\vee\overline{X}) = (\overline{X}\vee Y)(\overline{Y}\vee\overline{X})(\overline{Z}\vee\overline{X})$ – КНФ

$(X\rightarrow Y)((\overline{Y}\rightarrow Z)\rightarrow\overline{X}) = (\overline{X}\vee Y)(\overline{\overline{Y}\vee Z}\vee\overline{X}) = (\overline{X}\vee Y)(\overline{Y}\overline{Z}\vee\overline{X}) = \overline{X}\overline{Y}\overline{Z}\vee Y\overline{Y}\overline{Z}\vee\overline{X}\overline{X}\vee Y\overline{X} =$ $\boldsymbol{\overline{X}\overline{Y}\overline{Z}\vee\overline{X}\vee Y\overline{X} = \overline{X}\overline{Y}\overline{Z}\vee\overline{X} = \overline{X}}$ **(и ДНФ и КНФ)**

1 форма   2 форма

d. $(X\leftrightarrow Y)(Z\rightarrow T) = (XY\vee\overline{X}\overline{Y})(\overline{Z}\vee T) = XY\overline{Z}\vee XYT\vee\overline{X}\overline{Y}\overline{Z}\vee\overline{X}\overline{Y}T$ - ДНФ

$(X\leftrightarrow Y)(Z\rightarrow T) = (X\vee\overline{Y})(\overline{X}\vee Y)(\overline{Z}\vee T)$ – КНФ

В следующем примере используем снятие импликации в виде: $A\leftrightarrow B = (A\vee\overline{B})(\overline{A}\vee B)$

a. $F(x, y, z) = x\vee\overline{yz}(x\vee y) = x\vee(\overline{y}\vee\overline{z})(x\vee y) = x\vee\overline{y}x\vee\overline{y}y\vee\overline{z}x\vee\overline{z}y =$ $\boldsymbol{x\vee\overline{y}x\vee\overline{z}x\vee\overline{z}y = x\vee\overline{z}x\vee\overline{z}y = x\vee\overline{z}y}$ **– ДНФ**

$F(x, y, z) =$ $\boldsymbol{x\vee\overline{z}y = (x\vee\overline{z})(x\vee y)}$ **- КНФ**

Лекция № 9. Совершенная дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы (СДНФ и СКНФ)

План

1. Понятие совершенной дизъюнктивной и конъюнктивной нормальных форм
2. Приведение к СДНФ и СКНФ аналитическим способом
3. Приведение к СДНФ и СКНФ табличным способом

1) **Понятие совершенной дизъюнктивной и конъюнктивной нормальных форм**

Нормальная форма называется **совершенной**, если в каждой ее элементарной дизъюнкции (конъюнкции) представлены все переменные, входящие в данную функцию (либо сами, либо с отрицанием).

Любая булева функция, не являющаяся тождественным нулем или единицей, имеет только одну СДНФ с точностью до расположения переменных.

2) Приведение к СДНФ и СКНФ аналитическим способом

Чтобы ДНФ привести к СДНФ, необходимо слагаемые, в которых не хватает переменных умножить на логическую единицу и затем представить единицу в виде: $x\vee\overline{x}$ (т.к. $x\vee\overline{x}=1$). Далее раскрыть скобки и упростить получившиеся выражение.

Пример 1. Приведем к СДНФ

$F(x, y, z) = x\vee\bar{z}y = x\cdot1\cdot1\vee\bar{z}y\cdot1 = x\cdot1\cdot1\vee\bar{z}y\cdot1 = x\cdot(y\vee\bar{y})(z\vee\bar{z})\vee\bar{z}y(x\vee\bar{x}) = xyz\vee\underline{xy\bar{z}}\vee x\bar{y}z\vee x\bar{y}\bar{z}\vee\underline{\bar{z}yx}\vee\bar{z}y\bar{x} = xyz\vee xy\bar{z}\vee x\bar{y}z\vee x\bar{y}\bar{z}\vee\bar{x}y\bar{z}$

Чтобы привести КНФ с СКНФ, необходимо дополнить слагаемые где не хватает переменных логическим нулем и затем представить 0 в виде: $x\cdot\bar{x}$. Далее раскрыть скобки и упростить получившиеся выражение.

Пример 2. Привести КНФ с СКНФ

$F(x, y, z) = (\bar{x}\vee z)(y\vee\bar{z})(x\vee\bar{y}\vee z) = (\bar{x}\vee z\vee y\bar{y})(y\vee\bar{z}\vee x\bar{x})(x\vee\bar{y}\vee z) =$

$= (\bar{x}\vee z\vee y)(\bar{x}\vee z\vee\bar{y})(y\vee\bar{z}\vee x)(y\vee\bar{z}\vee\bar{x})(x\vee\bar{y}\vee z) =$

$= (\bar{x}\vee y\vee z)(\bar{x}\vee\bar{y}\vee z)(y\vee\bar{z}\vee x)(y\vee\bar{z}\vee\bar{x})(x\vee\bar{y}\vee z)$

3) Приведение к СДНФ и СКНФ табличным способом

СДНФ.

В таблице истинности выбираем строчки, в которых значение формулы истинно. Для каждой строчки составляем элементарные конъюнкции, причем если значение равно 1, то пишем саму переменную, если 0, то ее отрицание. Далее составляем дизъюнкции построенных элементарных конъюнкций.

СКНФ.

В таблице истинности выбираем строчки, в которых значение формулы ложно. Для каждой строчки составляем элементарные дизъюнкции, причем если значение равно 0, то пишем саму переменную, если 1, то ее отрицание. Далее составляем конъюнкции построенных элементарных дизъюнкций.

Пример 3. Найти СДНФ и СКНФ для формулы $F(x,y,z) = (x\leftrightarrow y)\vee(y\leftrightarrow z)$.

Составим таблицу истинности для данной формулы:

x	y	z	x↔y	y↔z	(x↔y)∨(y↔z)		
0	0	0	1	1	1		
0	0	1	1	0	1		
0	1	0	0	0	0		
0	1	1	0	1	1		
1	0	0	0	1	1		
1	0	1	0	0	0		
1	1	0	1	0	1		
1	1	1	1	1	1		

x	y	z	x↔y	y↔z	(x↔y)∨(y↔z)	СДНФ	СКНФ
0	0	0	1	1	1	$\bar{y}\bar{z}\bar{x}$	
0	0	1	1	0	1	$xy\bar{z}$	
0	1	0	0	0	0		$x\vee\bar{y}\vee z$
0	1	1	0	1	1	$yz\bar{x}$	
1	0	0	0	1	1	$\bar{y}\bar{z}x$	
1	0	1	0	0	0		$\bar{x}\vee y\vee\bar{z}$
1	1	0	1	0	1	$xy\bar{z}$	
1	1	1	1	1	1	xyz	

F(x,y,z) = $xyz \vee xy\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee yz\bar{x} \vee \bar{y}\bar{z}x \vee \bar{y}\bar{z}\bar{x}$ - СДНФ

F(x,y,z) = $(x \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})$ - СКНФ

Лекция № 10. Методы минимизации нормальных форм булевых функций

План

1. Понятие минимальной нормальной формы
2. Минимизация нормальных форм булевых функций с помощью равносильных преобразований
3. Минимизация нормальных форм булевых функций с помощью карт Карно

1) Понятие минимальной нормальной формы

Нормальная форма называется ***минимальной (сокращенной)***, если она включает минимальное число символов по сравнению со всеми другими эквивалентными ей нормальными формами. ***Минимальная нормальная*** форма получается из СДНФ (СКНФ) удалением некоторых элементарных конъюнкций (дизъюнкций).

2) Минимизация нормальных форм булевых функций с помощью равносильных преобразований

Пример 1. F = $\bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}z$

Сгруппируем слагаемые так, чтобы некоторые множители можно было бы вынести за скобку

F = $\bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}z = (\bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z}) \vee (\bar{x}\bar{y}z \vee x\bar{y}z) = \bar{x}\bar{z}(\bar{y} \vee y) \vee \bar{y}z(\bar{x} \vee x) = \bar{x}\bar{z} \vee \bar{y}z$

Пример 2. Дана СДНФ F(x,y,z) = $\bar{x}yz \vee xy\bar{z} \vee xyz$. Минимизировать ее и построить для нее логическую схему.

Минимизируем СДНФ с помощью равносильных преобразований:

F(x,y,z) = $\bar{x}yz \vee xy\bar{z} \vee xyz = (\bar{x}yz \vee xyz) \vee xy\bar{z} = yz(\bar{x} \vee x) \vee xy\bar{z} = yz \vee xy\bar{z} = y(z \vee x\bar{z}) = y(z \vee x)(z \vee \bar{z})$ $= y(z \vee x)$

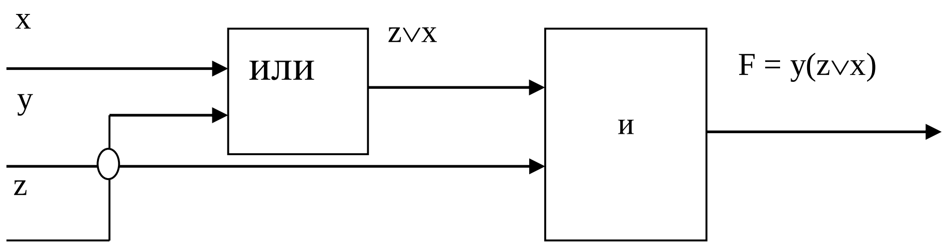
Получили две равносильные минимальные формы:

F(x,y,z) = $yz \vee xy\bar{z}$ в виде ДНФ

F(x,y,z) = $y(z \vee x)$ в виде КНФ.

Рациональнее строить логическую схему по КНФ, т.к. она содержит меньшее количество операций, а, следовательно, и элементов в схеме.

Данную функцию реализует следующая логическая схема:



3) Минимизация нормальных форм булевых функций с помощью карт Карно

Этот способ предложил в 1952 Эдвард В. Вейч, а доработал и усовершенствовал, немного позже в 1953, Морис Карно.

Карты Карно – это таблицы, с помощью которых можно найти минимальную булеву функцию для числа переменных n<=6. Эти таблицы содержат на 2^n клеток (n – количество переменных). В каждой клетке находится двоичное значение функции F (0 или 1) из таблицы истинности или из СДНФ.

Шаблон карты Карно для 2 переменных

	$\bar{X}$ или 0	X или 1
$\bar{Y}$ или 0		
Y или 1		

Шаблон карты Карно для 3 переменных

	$\bar{x}\bar{y}$ 00	$\bar{x}y$ 01	xy 11	$x\bar{y}$ 10
Z 1				
$\bar{z}$ 0				

Шаблон карты Карно для 4 переменных

	$\bar{z}\bar{d}$	$\bar{z}$d	zd	z$\bar{d}$
$\bar{x}\bar{y}$				
$\bar{x}y$				
xy				
$x\bar{y}$				

Алгоритм минимизации с помощью карт Карно

1. Представить булеву функцию в виде СДНФ или таблицы истинности.
2. Нанести единицы СДНФ или таблицы истинности на карты Карно
3. Объединить соседние единицы контурами, охватывающими четное количество клеток. При этом может оказаться, что единица попадает одновременно в два контура.
4. Провести упрощения в каждом контуре. Для этого, нужно посмотреть какие переменные не меняются в пределах контура, и выписать конъюнкцию эти переменных.
5. Объединить получившиеся конъюнкции дизъюнкцией.

Пример 1. Дана функция F(x,y,z) = $\bar{x}$y$\bar{z}$∨ $\bar{x}$yz∨xy$\bar{z}$∨xyz. Составить карту Карно и минимизировать функцию.

Решение.

Нанесем единицы на карту:

	$\bar{x}\bar{y}$ 00	$\bar{x}y$ 01	xy 11	$x\bar{y}$ 10
Z 1	0	1	1	0
$\bar{z}$ 0	0	1	1	0

Обведем единицы попарно двумя контурами. В первом контуре не меняется $\bar{x}y$, во втором xy

Запишем полученный результат **F(x,y,z) =** $\boldsymbol{\bar{x}y}$**∨xy**

В данном примере можно рассмотреть весь квадрат из четырех единиц, в этом квадрате не меняется **y**.

Пример 2. Пусть F = $\bar{x}$y ∨ x$\bar{y}$ ∨ xy. Составить карту Карно и минимизировать функцию.

Решение.

Нанесем единицы на карту:

	$\bar{X}$ 0	X 1
$\bar{Y}$ 0		1
Y 1	1	1

F = x ∨ y.

Пример 3. Построить минимальную функцию по таблице истинности.

x	y	z	F
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Решение.

Нанесем единицы на карту:

	$\bar{x}\bar{y}$ 00	$\bar{x}y$ 01	xy 11	$x\bar{y}$ 10
Z 1	1			1
$\bar{z}$ 0	1	1	1	

F = $\bar{x}\bar{y} \vee y\bar{z} \vee \bar{y}$z

Лекция № 11. Сумма по модулю два и ее свойства. Многочлен Жегалкина

План

1. Сумма по модулю два и ее свойства.
2. Применение суммы по модулю два в компьютере
3. Полином Жегалкина

1) Операция двоичного сложения и ее свойства

Суммой по модулю два (или строгой дизъюнкцией) двух переменных x и y называется булева функция x⊕y, которая равна 1 тогда и только тогда, когда равна 1 только одна из переменных.

$0 \oplus 0 = 0$
$0 \oplus 1 = 1$
$1 \oplus 0 = 1$
$1 \oplus 1 = 0$

Откуда берется название «сумма по модулю два»?

На языке программирования Паскаль функция, которая считает остаток от деления числа A на число B обозначается, как A mod B. Рассмотрим множество {0,1} обычных чисел в математике и произведем для этого множества операцию (a+d) **mod** 2.

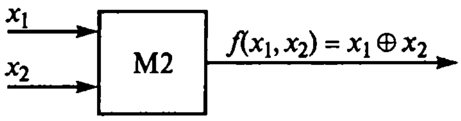
(0 + 0) **mod** 2 = 0
(0 + 1) **mod** 2 = (1 + 0) **mod** 2 = 1 **mod** 2 = 1
(1 + 1) **mod** 2 = 2 **mod** 2 = 0

Таким образом, операция (a+d) mod 2 на множестве {0,1} совпадает со строгой дизъюнкцией над булевыми переменными. Отсюда произошло и название «сумма по модулю два».

Законы для суммы по модулю 2

1. Переместительный закон: $\mathbf{x_1 \oplus x_2 = x_2 \oplus x_1}$
2. Сочетательный закон: $\mathbf{(x_1 \oplus x_2) \oplus x_3 = x_1 \oplus (x_2 \oplus x_3)}$
3. Распределительный закон (относительно конъюнкции): $\mathbf{x_1(x_2 \oplus x_3) = x_1x_2 \oplus x_1x_3}$
4. Снятие суммы по модулю 2 (разложение в СДНФ): $\mathbf{x_1 \oplus x_2 = \overline{x_1}x_2 \vee x_1\overline{x_2}}$
5. Формула отрицания: $\mathbf{\overline{x_1 \oplus x_2} = \overline{x_1} \oplus x_2 = x_1 \oplus \overline{x_2}}$
6. Связь между дизъюнкцией и суммой по модулю два: $\mathbf{x_1 \vee x_2 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_1x_2}$
7. Операции с константами
   – $\boldsymbol{x \oplus \mathrm{x} = 0}$
   – $\boldsymbol{x \oplus 0 = \mathrm{x}}$
   – $\boldsymbol{x \oplus \overline{\mathrm{x}} = 1}$
   – $\boldsymbol{x \oplus 1 = \overline{x}}$

Логический элемент, соответствующей операции сумма по модулю два:



Реализовать такой элемент технически в электронике достаточно сложно. Поэтому на практике он реализуется из набора простых и хорошо работающих элементов: И, НЕ, ИЛИ.

Задание 1. Нарисуйте логическую схему для суммы по модулю два, используя закон снятия суммы по модулю два: $\mathbf{x_1 \oplus x_2 = \overline{x_1}x_2 \vee x_1\overline{x_2}}$.

2) Применение суммы по модулю два в компьютере

Сумма по модулю два аналогична операции двоичного сложения. Операция двоичного сложения в пределах последнего двоичного разряда имеет ту же последовательность символов, что и сумма по модулю два:

$0 + 0 = 0,$
$0 + 1 = 1,$
$1 + 0 = 1,$
$1 + 1 = (1)\ 0.$

Двоичное сложение используется в сумматоре процессора, который обеспечивает сложение двоичных чисел (в целях максимального упрощения работы компьютера все многообразие математических операций в процессоре сводится к двоичному сложению).

Как изменится результат операции, если изменится одна из исходных переменных на противоположную?

Результат станет противоположным. Таким образом, если входной сигнал исказится, то мы сразу это может увидеть по измененному выходному сигналу.

Такое наблюдение дает основание для выдвижения гипотезы, что сумма по модулю два может использоваться для системы контроля и исправления ошибок.

Схемы по модулю два используются в двоичном сумматоре для системы контроля и исправления ошибок. Если из-за неисправности в схеме один из аргументов функции по модулю два исказится, то, одновременно и значение функции исказится на противоположное, что сразу можно будет обнаружить на выходе. Поэтому операция сложения по модулю два имеет особое значение для организации работы компьютера.

3) Полином Жегалкина

Любую булеву функцию можно представить с помощью суммы по модулю два.

Представление булевой функции в виде:

$$f(x_1x_2\ldots x_n) = f_0 \oplus f_1x_1 \oplus f_2x_2 \oplus \ldots \oplus f_nx_n \oplus f_{12}x_1x_2 \oplus \ldots \oplus f_{12\ldots n}x_1x_2\ldots x_n$$

называется **каноническим полиномом Жегалкина**.

Например, общий вид полинома Жегалкина для функции, зависящей от трех переменных:

$$P(x,y,z) = a_0 \oplus a_1x \oplus a_2y \oplus a_3z \oplus a_{12}xy \oplus a_{13}xz \oplus a_{23}zy \oplus a_{123}xyz.$$

Пример 1. Построить полином Жегалкина для функции F(x, y, z) = (11001010).

Решение. Необходимо построить полином Жегалкина для функции, зависящей от 3-х переменных (общий вид такого полинома см. выше).

1) Запишем таблицу истинности для данной функции (столбцы x, y, z заполним в стандартном виде, столбец f на основании данной функции F(x, y, z) = (11001010). Пронумеруем столбцы в таблице истинности.

m - номер строки	**x**	**y**	**z**	**f**
0	0	0	0	1
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

2) Добавим к таблице истинности столбец «треугольника Паскаля» и заполним его. Правило заполнения:
   - в нулевую строку выписывается транспонированный (перевернутый в строку) вектор-столбец значений функции.
   - элементы последующих строк получаются последовательным сложением по модулю 2 двух вышестоящих чисел предыдущей строки. Т.е. при сложении по модулю 2 используются правила:

$$0 \oplus 0 = 0,\ 0 \oplus 1 = 1$$
$$1 \oplus 0 = 1,\ 1 \oplus 1 = 0$$

m	x	y	z	f	Треугольник Паскаля														
0	0	0	0	1	1		1		0		0		1		0		1		0
1	0	0	1	1		0		1		0		1		1		1		1	
2	0	1	0	0			1		1		1		0		0		0		
3	0	1	1	0				0		0		1		0		0			
4	1	0	0	1					0		1		1		0				
5	1	0	1	0						1		0		1					
6	1	1	0	1							1		1						
7	1	1	1	0								0							

3) Добавим к таблице истинности столбец «Слагаемые», такой что:
   - в нулевой строке – значение 1
   - в остальных строках – конъюнкция переменных, значения которых в соответствующей строке равны 1.

m	x	y	z	f	Треугольник Паскаля															слагаемые
0	0	0	0	1	1		1		0		0		1		0		1		0	1
1	0	0	1	1		0		1		0		1		1		1		1		z
2	0	1	0	0			1		1		1		0		0		0			y
3	0	1	1	0				0		0		1		0		0				yz
4	1	0	0	1					0		1		1		0					x
5	1	0	1	0						1		0		1						xz
6	1	1	0	1							1		1							xy
7	1	1	1	0								0								xyz

4) Определим вектор-столбец λ, состоящий из лидеров (первых значений) каждой строки треугольника Паскаля. Выделим слагаемые с лидером равным 1.

m	x	y	z	f	Треугольник Паскаля															слагаемые
0	0	0	0	1	**1**		1		0		0		1		0		1		0	1
1	0	0	1	1		**0**		1		0		1		1		1		1		z
2	0	1	0	0			**1**		1		1		0		0		0			y
3	0	1	1	0				**0**		0		1		0		0				yz
4	1	0	0	1					**0**		1		1		0					x
5	1	0	1	0						**1**		0		1						xz
6	1	1	0	1							**1**		1							xy
7	1	1	1	0								**0**								xyz

Вектор-столбец лидеров (выделены полужирным в треугольнике Паскаля) имеет вид λ=(10100110).

5) Сложим по модулю 2 выделенные слагаемые.

$F(x, y, z) = 1 \oplus y \oplus xy \oplus xz$ -многочлен Жегалкина для функции $F(x, y, z) = (11001010)$

Лекция № 12. Основные классы функций. Полнота множества. Теорема Поста

План

1. Основные замкнутые классы (классы Поста)
2. Теорема Поста

1) Основные замкнутые классы (классы Поста)

Название класса	**Условие принадлежности к классу**	**Примеры функций**	**Проверка на принадлежность**
Класс функций, сохраняющих константу 0 (T_0).	F(00..0) = 0	x&y; x∨y; x; x⊕y	1. Проверим F=x&y: F(00) = 0 2. Проверим $F = x_1\overline{x_2} \vee x_1x_2\overline{x_3}$ F (000) = 0*1 ∨0*0*1 = 0
Класс функций, сохраняющих константу 1 (T_1).	F(11..1) = 1	x&y; x; x∨y; x→y x↔y	1. Проверим F=x&y: F(11) = 1 2. Проверить самостоятельно: $F(x_1x_2x_3) = x_1 \vee \overline{x_1}x_2 \vee x_1x_2\overline{x_3}$
Класс самодвойственных функций (S)	F(x,y,z) = F*(x,y,z)	X, $\bar{x}$	F(x) = x; F*(x) =$\bar{\bar{x}}$ = x Смотри пример ниже
Класс линейных функций (L)	Полином Жегалкина имеет вид многочлена первой степени: $a_0 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus \ldots a_nx_n$	x↔y	F = x↔y =(1001)
Класс монотонных функций (M)	F(α ≺ β) при α ≺ β, при этом $0 \prec 0,\ 0 \prec 1,\ 1 \prec 1$	X, 0, 1, x&y; x∨y;	Проверим F=x&y F(00)=0<F(01)=0 при 00<01 F(00)=0<F(11)=1 при 00<11 F(10)=0<F(11)=1 при 10<11 Элементы 10<01 – не сравнимы, следовательно нельзя сравнивать функции F(10)=0 и F(01)=0

Двойственные функции:

Функция F*(x1, x2, … xn) является **двойственной** по отношению к функции F(x1, x2, … xn), если F*(x1, x2, … xn) = $\overline{F(\overline{x1}, \overline{x2}, \ldots\ \overline{xn})}$

Свойства:

0* = 1;

x* = x;

$\bar{x}$* = $\bar{x}$;

(xy)* = x ∨ y

Функция называется **самодвойственной**, если F = F*. Например, самодвойственная функции F (x) = x

2) Теорема Поста

Множество А, А ⊆Р2, называется полной системой, если формулами над А можно выразить любую функцию алгебры логики.

Теорема Поста. Пусть А ⊆ Р2. Множество А является полной системой тогда и только тогда, когда А не содержится ни в одном из классов Т0, Т1, L, S, M.

ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

Основная литература:

1. Спирина М.С. Дискретная математика: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования/ М.С. Спирина, П.А. Спирин. – М.: Издательский центр «Академия», 2018. - 368 с.

Дополнительная литература:

1. Игошин В.И. Элементы математической логики: учеб. для студ. учреждений сред. проф. образования. – М.: Издательский дом «Академия», 2021. – 320 с.
2. Спирина М.С. Дискретная математика: Сборник задач с алгоритмами решений: учеб. пособие для студ. учреждений сред. проф. образования. / М.С. Спирина, П.А. Спирин. – М.: Издательский центр «Академия», 2017. - 288 с.
3. Баврин И.И. Дискретная математика: учебник и задачник для среднего профессионального образования. – М.: Издательство Юрайт, 2022. – 193 с. *(образовательная платформа Юрайт https://urait.ru/).*
4. Гашков С.Б. Дискретная математика: учебник и практикум для среднего профессионального образования / С.Б. Гашков, А.Б. Фролов. – М.: Издательство Юрайт, 2022. – 483 с. *(образовательная платформа Юрайт https://urait.ru/).*
5. Гисин В.Б. Дискретная математика: учебник и практикум для среднего профессионального образования. – М.: Издательство Юрайт, 2022. – 383 с. *(образовательная платформа Юрайт https://urait.ru/).*
6. Палий И.А. Дискретная математика и математическая логика: учебное пособие для среднего профессионального образования / С.Б. Гашков, А.Б. Фролов. – М.: Издательство Юрайт, 2022. – 370 с. *(образовательная платформа Юрайт https://urait.ru/).*

Интернет-ресурсы:

1. Онлайн калькулятор по математической логике [Электронный ресурс]. – Форма доступа: http://tablica-istinnosti.ru/ru/
2. Прикладная математика. Справочник математических формул. Примеры и задачи с решениями [Электронный ресурс]. – Форма доступа: http://www.pm298.ru
3. Математический форум MathHelpPlanet. Обсуждение и решение задач по математике, физике, химии, экономике [Электронный ресурс] – Форма доступа: http://mathhelpplanet.com/static.php