Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение

«Арзамасский коммерческо-технический техникум»

Саблукова Наталья Геннадьевна

Комплект лекций

по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика»
Часть 1. Теория вероятностей

для студентов специальности
09.02.07 Информационные системы и программирование

Арзамас
2022

Одобрено методическим объединением естественно-математических и информационных дисциплин
Протокол № 1 от 30.08.2022 г

Саблукова Н.Г.
Комплект лекций по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика» для студентов специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование – Арзамас: ГБПОУ АКТТ, 2022. – 65 с.

Комплект лекций содержат материал по разделу Теория вероятностей дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика», изучаемой студентами данной специальности на втором курсе. Представленная информация может быть использована студентами как во время учебных занятий по данной дисциплине, а также в рамках самостоятельной работы во внеурочное время.

Содержание

Введение

Курс лекций составлен в соответствии с рабочей программой дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» и требованиями федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования по специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование.

Курс лекций раскрывает основные вопросы тем раздела Теория вероятностей дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика»:

- Элементы комбинаторики.
- Основы теории вероятности.
- Дискретные случайные величины
- Непрерывные случайные величины

Лекционный материал содержит краткую информацию по основным темам дисциплины. Каждая лекция содержит:

- план (перечень вопросов, рассматриваемых в рамках темы);
- изложение основных вопросов, в соответствии с представленным планом.

Учебное пособие предназначено для студентов очной формы обучения по специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование и может быть использовано как во время учебных занятий по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика», а также в рамках самостоятельной работы во внеурочное время.

Лекция № 1. Введению в теорию вероятностей

План.

1. Виды событий.
2. Предмет и применение теории вероятностей
3. История развития теории вероятностей

1) Виды событий. Предмет и методы теории вероятностей

Наблюдаемые нами события (явления) можно подразделить на три вида: достоверные, невозможные и случайные.

1) Достоверным называют событие, которое обязательно произойдет, если будет осуществлена определенная совокупность условий.

Пример, если в сосуде содержится вода при нормальном давлении и температуре 20°, то событие «вода в сосуде находится в жидком состоянии» - достоверное.

2) Невозможным называют событие, которое заведомо не произойдет, если будет осуществлена совокупность условий.

Пример, событие «вода в сосуде находится в твердом состоянии» заведомо не произойдет, если будет осуществлена совокупность условий предыдущего примера.

3) Случайным называют событие, которое при осуществлении совокупности условий может либо произойти, либо не произойти.

Пример, событие «при бросании монеты выпал «герб» – случайное.

2) Предмет и применение теории вероятностей

Теория вероятностей – раздел математики, изучающий закономерности случайных явлений, случайные события и случайные величины, их свойства и операции над ними.

Методы теории вероятностей используются для исследования случайных массовых явлений и широко применяются в различных отраслях: в теории надежности, теории массового обслуживания, теории информации, в физике, геодезии, астрономии, областях военной техники, теории ошибок наблюдений, теории автоматического управления, общей теории связи и др.

3) История развития теории вероятности

<u>1 этап – Предыстория теории вероятности (с античности до 17 в)</u>

На данном этапе никаких общих методов и понятий еще не возникает. Вероятность рассматривается лишь в:

- рассуждениях философов о происхождении случайности;
- при решении элементарных задач;
- в комбинаторных методах.

Ученые античности: Демокрит, Лукреций. Более поздние ученые: Д.Кардано, Л.Пачоли, Н.Тарталья и др.

<u>2 этап – Возникновение теории вероятности как науки (середина 17 – начало 18 века)</u>

- развитие физики, астрономии, проблемы демографии и страхования способствуют развитию теории вероятности;
- формулируются понятия (вероятность и математическое ожидание), устанавливаются свойства вероятности

Основатели теории вероятности: П. Ферма, Б. Паскаль, Х. Гюйгенс.

3 этап – Формирование основ теории вероятности (с 1713 г до сер. 19 в)

Как математическая наука теории вероятностей начинается с работы выдающегося швейцарского математика ***Якоба Бернулли*** «Искусство предположений» (1713 г).

Вклад в развитие теории вероятностей внесли также П. С. Лаплас, К. Ф. Гаусс, Пуассон и целый ряд других видных математиков того времени.

4 этап – Русская Петербургская математическая школа (кон. 19 – нач. 20 в)

Теория вероятностей стала самостоятельным разделом математики. Развитие теории вероятностей теснейшим образом связано с работами русских, а в дальнейшем – советских ученых: Чебышева П. Л., Маркова А.А., А. М. Ляпунова.

5 этап – Современный период (сер. 20 – 21 в)

Советские ученые: Бернштейн С. Н., Хинчин А.Я., Колмогоров А.Н. (завершил аксиоматику теории вероятностей)

Зарубежные ученые: Р. Фишер, Д. Нейман и Г. Крамер.

В настоящее время теория вероятностей – строгая логическая теория, одна из перспективных развивающихся областей знаний, которая служит инструментом различных исследований.

Лекция № 2. Комбинаторика. Правила суммы и произведения. Перестановки

План

1. Понятие комбинаторики
2. Правило произведения
3. Правило суммы
4. Перестановки

1) Понятие комбинаторики

Человеку часто приходится иметь дело с задачами, в которых нужно подсчитать число всех возможных способов расположения некоторых предметов или число всех возможных способов осуществления некоторого действия. Например, сколькими способами могли быть распределены золотая, серебряная и бронзовая медали на Олимпийских играх в Сочи по баскетболу; или сколькими различными способами можно разместить здания на площади? Выбором объектов и их расположением приходится заниматься чуть ли не во всех областях человеческой деятельности – конструктору, учёному-генетику, агроному, составителю кодов, лотерей, химику, комбинаторные задачи применяются при игре в шашки, шахматы, при подсчёте вариантов в теории вероятностей и т.д. Задачи такого типа называются комбинаторными, а раздел математики, занимающийся их решением, называется комбинаторикой.

Комбинаторика – это раздел математики, в котором изучается, сколько различных комбинаций, подчинённых определенным условиям, можно составить из заданных объектов.

Термин «комбинаторика» происходит от латинского слова combina – сочетать, соединять.

Термин «комбинаторика» ввел в математический обиход немецкий философ и математик ***Готфрид Вильгельм фон Лейбниц***

Комбинаторика широко применяется в теории вероятностей, теории массового обслуживания, теории управляющих систем и вычислительных машин, в вычислительной технике (для оптимального размещения элементов системы, для размещения микросхем на плате или элементов на кристалле, при трассировке (выборе маршрута) и т.д.), кибернетике, робототехнике, конструировании и других разделах науки и техники.

Все разнообразие комбинаторных формул может быть выведено из двух основных утверждений, касающихся конечных множеств – правило суммы и правило произведения. Эти два важных правила часто применяются при решении комбинаторных задач.

2) Правило произвдения

Пусть требуется выполнить одно за другим k действий. Если первое действие можно выполнить n_1 способами, второе действие – n_2 способами, третье – n_3 способами и так до k-го действия, которое можно выполнить n_k способами, то все k действий могут быть выполнены $n_1*n_2*n_3*\ldots*n_k$ способами.

Пример 1. В футбольной команде (11 человек) нужно выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

Решение

1 действие: Капитана можно выбрать 11 способами (т.к. каждый член команды может быть капитаном)

2 действие: Заместителя капитана можно выбрать 10 способами (1 человек стал капитаном, остается 10 членов команды, среди которых выбирается заместитель)

По правилу произведения капитана и его заместителя можно выбрать 11*10 способами.

11*10 = 110 способов

Ответ: 110 способов.

Пример 2. Необходимо составить варианты контрольной работы, каждый из которых должен содержать 3 задачи. Одна задача выбирается из любого параграфа I главы сборника задач, вторая – из любого параграфа II главы сборника, а последняя – из любого параграфа третьей главы. При этом следует учесть, что I и III главы содержат два параграфа, а II глава – три параграфа. Сколько видов контрольной работы можно составить исходя из этих условий, если вид работы определяется только номером паргарфов, из которых выбраны задачи?

Решение. В задаче требуется для каждого вида контрольной работы подобрать три параграфа по одному из указанных трех глав.

Из первой главы – 2 способы выбора параграфов

Из второй главы – 3 способы выбора параграфов

Из третьей главы – 2 способы выбора параграфов

Тогда общее число видов контрольной работы: 2*3*2=12.

3) Правило суммы.

Если два действия взаимно исключают друг друга, причем одно из них можно выполнить m способами, а другое – n способами, то выполнить любое из этих действий можно m+n способами. Это правило рапространяется на любое конечное число действий.

Пример 3. Ученик должен выполнить практическую работу по математике. Ему предложили на выбор 17 тем по алгебре и 13 тем по геометрии. Сколькими способами он может выбрать одну тему для практической работы (либо по алгебре, либо по геометрии)?

Решение

Действия взаимно исключают друг друга: ученик может выбрать только одну тему или из алгебры, или из геометрии. Используем правило суммы: 17 + 13 = 30 способов

Ответ: 30 способов

Пример 4. Имеется 20 изделий 1-го сорта и 30 изделий 2-го сорта. Необходимо выбрать два изделия одного сорта. Сколько способов выбора двух изделий возможно в данной ситуации, если учитывается порядок выбора изделий?

Решение

Условимся первым действие считать выбор изделий 1-го, вторым – выбор изделий 2-го сорта.

По правилу умножения два изделия 1-го сорта можно выбрать 20*19=380 способами.

Аналогично, два изделия 2-го сорта можно выбрать 30*29=870 способами.

Согласно условию задачи, следует выбрать два изделия одного сорта, не важно какого. Это могут быть либо изделия 1-го сорта, либо изделия 2-го сорта. Эти действия не могут быть выполнены одновременно, поскольку они взаимно исключают друг друга. Поэтому общее число способов выбора изделий одного сорта равно 380+870=1250.

4) Перестановки

На основе рассмотренных правил суммы и произведения можно получить формулы для основных комбинаторных объектов. **К основным комбинаторным объектам относятся: перестановки, размещения и сочетания.**

А) Перестановки без повторений

Перестановки (без повторений) – это комбинации, состоящие из одних и тех же n различных элементов, отличающиеся только порядком их расположения.

Число перестановок из n элементов обозначается P_n.

Теорема. Число перестановок n различных элементов равно n!, т.е.

$$\mathbf{P_n=n!}$$

В формулах для нахождения кобинаторных объектов часто используется знак ! - это функция факториала.

Факториал – это функция, определённая для целых неотрицательных чисел и равная произведению всех чисел от 1 до n. Факториал от n обозначается n! и он равен **n! = 1*2*3*...*n**

Пример 1 Пусть имеются числа 3, 5, 7. Этому множеству чисел соответствует 6 перестановок: 357, 375, 537, 573, 753, 735.

Пример 2 Сколькими способами можно расставить на одной полке шесть различных книг?

Решение

P_6 = 6! = 1*2*3*4*5*6=720

Пример 3 Сколькими способами можно расставить 9 различных книг на полке, чтобы определенные 4 книги лежали рядом?

Решение

Будем считать выделенные книги за одну книгу – получим 6 книг. Тогда для шести книг существует P_6 = 6! = 720 перестановок.

Однако 4 определенные книги можно переставить между собой P_4=4!=24 способами.

По правилу умножения имеем P_6*P_4=720*24=17280.

б) Перестановки с повторениями

Если рассматривать упорядоченные наборы из k-элементов множества M, которые состоят не только из различных элементов множества M, но содержат некоторые повторяющиеся элементы, то получим **перестановки с повторением**

Пусть M={a_1, a_2, a_3, …, a_n} – множество из n элементов и i_1, i_2, i_3, …, i_n – натуральные числа (i_1 – количество раз повторения a_1, i_2 – количество раз повторения a_2 и т.д.), такие, что их сумма равна k и k>n. Тогда количество перестановок с повторениями рассчитывается по следующей формуле:

$$\overline{P_n} = \frac{n!}{i_1!\, i_2! \ldots i_n!}$$

Пример 4 Сколько различных шестизначных чисел можно составить из цифр 1, 1, 1, 5, 5, 9?

Решение $\overline{P_6} = \frac{6!}{3!2!1!} = 60$

Пример 5 Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы слова «математика»?

Решение $\overline{P_6} = \frac{10!}{2!3!2!} = 151200$

Лекция № 3. Размещения (упорядоченные выборки). Неупорядоченные выборки (сочетания)

План

1. Размещения (упорядоченные выборки)
2. Сочетания (неупорядоченные выборки)

1) Размещения (упорядоченные выборки)

Пусть имеется некоторое множество, содержащее конечное число членов. Например, множество учебных групп в техникуме, множество книг на полке, множество населенных пунктов в данной области или множество целых положительных чисел, меньших 10 и т.д. Все элементы такого множества можно пронумеровать, т.е. каждому элементу множества поставить в соответствие одно из чисел: 1,2, 3,4 … n; в результате получается некоторая последовательность элементов данного множества, которые обычно записываются a_1, a_2, a_3, …, a_n. Такие «занумерованные» множества называются упорядоченными.

Упорядоченное множество – это множество элементов a_1, a_2, a_3, …, a_n, в котором каждому элементу множества поставлено в соответствие одно из чисел: 1,2, 3,4 … n.

Если в упорядоченном множестве поменять местами хотя бы два его элемента, то получим новое упорядоченное множество.

Пример 1 Пусть имеется множество, содержащее четыре буквы {A, B, C, D}. Запишем все возможные комбинации из четырех букв по две. Таких комбинаций получим 12: AB, BA, AC, CA, AD, DA, BC, CB, BD, DB, CD, DC. Данные комбинации отличаются порядком входящих в него элементов или составом.

Получившие комбинации представляют собой упорядоченные подмножества исходного множества или размещения.

а) Размещения без повторений

Размещение из n элементов по m элементам - это любое упорядоченное подмножество, состоящее из m различных элементов данного множества. Размещения отличаются друг от друга либо составом элементов, либо их порядком.

Число размещений из n элементов по m обозначается A_n^m , где m≤n
Изучением «размещений» впервые занимался Якоб Бернулли во второй части своей знаменитой книги «Искусство предугадывания», опубликованной в 1713 г. Он же ввел соответствующий термин.

Теорема. Число размещений из n элементов по m элементам равно $\boldsymbol{A_n^m} = \frac{\boldsymbol{n}!}{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{m})!}$

Пример 2 . В группе 30 человек. Нужно выбрать профорга и физорга. Сколькими способами это можно сделать.

$$\Diamond\ \boldsymbol{A_{30}^2} = \frac{30!}{(30-2)!} = \frac{30!}{28!} = \frac{30*29*28!}{28!} = 30 * 29 = 870$$

Чтобы упростить вычисление факториала в данной задаче использовалось свойство факториала: **n! = n*(n-1)!**.
Т.е. 30! = 30*29!, 29! = 29*28!, следовательно 30! можно записать следующим образом: 30! = 30*29*28!

Пример 3. Сколько можно составить сигналов из 6 флажков различного цвета, взятых по 2? (А =6*5 = 30)

б) Размещения с повторениями

Пусть даны различные виды предметов, которые можно разместить по различным местам, причем выбирать предметы можно с повторениями (т.е. можно выбрать несколько предметов одного вида). Такие выборки называются размещениями с повторениями.

Размещения с повторениями из n элементов по m – это любое упорядоченное подмножество, состоящее из m элементов данного множества, в котором элементы могут повторяться. То есть размещение с повторениями – это размещение «предметов» в предположении, что каждый «предмет» может участвовать в размещении несколько раз
Число размещений из n элементов по m с повторениями обозначается $\boldsymbol{\bar{A}_n^m}$
Число размещений из n элементов по m с повторениями равно

$$\boldsymbol{\bar{A}_n^m = n^m}$$

Пример 4 Пусть имеется множество, содержащее четыре буквы {A, B, C, D}. Запишите все размещения с повторениями.
Решение
Таких комбинаций получим 16: AB, BA, AC, CA, AD, DA, BC, CB, BD, DB, CD, DC, AA, BB, CC, DD.

$\boldsymbol{\bar{A}_4^2} = 4^2$=16

Пример 4 Имеется пять различных стульев и семь рулонов обивочной ткани различных цветов. Сколькими способами можно осуществить обивку стульев?

Решение

$\boldsymbol{\bar{A}_7^5}$=16807

2) Сочетания (неупорядоченные выборки)

Если два различных размещения состоят из одинаковых элементов некоторого множества, то они обязательно отличаются порядком входящих в них элементов. Иногда возникает необходимость не учитывать порядок элементов, входящих в размещения. В этом случае все m! размещений, которые состоят из одних и тех же элементов, считаются неразличимыми.

Пример 1. Сколько различных произведений получится из чисел 3, 5, 7?

Таких произведений три: 3*5=15; 3*7=21; 5*7= 35. Это объясняется тем, что произведения вида 3*5 и 5*3 совпадают, так как порядок сомножителей, входящих в произведение не учитывается.

2. Сколько различных двухзначных комбинаций получится из цифр 3, 5, 7?

Таких чисел получится 6: 35, 37, 57, 75, 73,53. Здесь порядок цифр важен.

3. Необходимо выбрать делегацию в составе 3 человек из 30 учащихся, нужно или здесь учитывать порядок выбранных делегатов? Не нужно, так как все делегаты равноправны.

4. Необходимо выбрать профорга, физорга и старосту из 30 учащихся. *Важен ли здесь порядок?* Здесь важен порядок, кто из учащихся какую должность займет.

а) Сочетания без повторений

Сочетанием из n элементов по m (без повторений) называется любое подмножество, состоящее из m различных элементов данного множества.

Число сочетаний из n элементов по m обозначается $C_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{m}}$.

Теорема. Число сочетаний из n элементов по m равно

$$C_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{m}} = \frac{\boldsymbol{n}!}{\boldsymbol{m}!\,(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{m})!}$$

Пример 1. В бригаде 25 человек. Нужно определить четырех для работы на определенном участке. Сколькими способами это можно сделать?

◊ Т.к. порядок выбранных четырех человек не имеет значения, то это можно сделать C_{25}^4способами.

$$C_{25}^4 = \frac{25!}{4!\,(25-4)!} = \frac{21!*22*23*24*25}{1*2*3*4*21!} = 12650$$

Пример 2. Имеется 10 белых и 5 черных шаров. Сколькими способами можно выбрать 7 шаров, чтобы среди них были 3 черных?

◊ Среди выбранных шаров должно быть 3 черных и 4 белых.

Белые шары можно выбрать $C_{10}^4 = \frac{10!}{4!6!} = 210$ способами

Черные шары можно выбрать $C_5^3 = \frac{5!}{3!2} = 10$ способами.

Тогда по правилу произведения, искомое число способов равно

$C_{10}^4 * C_5^3 = 2100.$

Пример 3. Сколькими способами можно группу из 12 человек разбить на две подгруппы, в одной из которых должно быть не более пяти, а во второй – не более девяти человек?

◊ Первая подгруппа может состоять либо из трех, либо из четырех, либо из пяти человек (варианты из одного или двух человек невозможны, т.к. во второй подгруппе получится более девяти человек).

Подгруппу из трех человек можно выбрать C_{12}^3= 220 способами,

из четырех – C_{12}^4 = 495 способами,

из пяти – C_{12}^5 = 792 способами.

Учитывая, что выбор первой подгруппы однозначно определяет вторую, найдем по правилу сложения искомое число способов: $C_{12}^{3} + C_{12}^{4} + C_{12}^{5} = 1507$

б) Сочетания с повторениями

Сочетания с повторениями из n элементов по m – это любое подмножество, состоящее из m элементов данного множества, в котором элементы могут повторяться.

Число сочетаний с повторениями обозначается $\overline{C}_n^m$

$$\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m$$

Задача. В кондитерском магазине продавались 4 сорта пирожных: эклеры, песочные, наполеоны и слоеные. Сколькими способами можно купить 7 пирожных.

◊ Покупка не зависит от того, в каком порядке укладывают купленные пирожные в коробку. Покупки будут различными, если они отличаются количеством купленных пирожных, хотя бы одного сорта. Следовательно, количество различных покупок равно числу сочетаний четырех видов пирожных по семь

$$\overline{C}_4^7 = C_{10}^7 = \frac{10!}{7!\,3!} = \frac{8 * 9 * 10}{3 * 2 * 1} = 120$$

Лекция № 4. Случайные события. Классическое определение вероятности

План

1. Понятия и виды случайных событий
2. Классическое определение вероятности
3. Примеры задач на вычисление вероятностей по классической формуле

1) Понятия и виды случайных событий

Основополагающим понятием для теории вероятностей является понятие «событие».

Событие – это явление, которое происходит в результате осуществления какого-либо определенного комплекса условий.

Событие называется случайным, если при осуществлении определенной совокупности условий, оно может, либо произойти, либо не произойти.

Пример. Выигрыш в лотерее, выход бракованного изделия с конвейера и т.д.

Случайное событие обозначается большими буквами латинского алфавита A, B, C и т.д.

Совокупность условий, при осуществлении которых случайное событие может либо произойти, либо не произойти, называется **испытанием или опытом**.

Таким образом, событие можно рассматривать как результат испытания. Испытание может быть осуществлено человеком, но может проводиться и независимо от человека, выступающего в этом случае в роли наблюдателя.

Пример. Определите события и испытание в предложениях:

- Стрелок стреляет по мишени, разделенной на 4 части (выстрел – испытание, попадание в определенную область – событие).
- В урне имеются 4 цветных шара. Из урны наудачу берут один шар (извлечение шара – испытание, появление шара определенного цвета - событие).
- Подбрасывают монету (брошена монета – испытание, выпадение герба или решки - событие).

Виды случайных событий:

1. **Несовместные и совместные события**.

События называются ***несовместными***, если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании. В противном случае события называются ***совместными***.

Примеры. Из ящика с деталями наудачу извлечена одна деталь. Появление стандартной детали исключает появление нестандартной детали. События «появилась стандартная деталь» и «появилась нестандартная деталь» - несовместные.

Брошена монета. Появление герба исключает появление надписи. События «появился герб» и «появилась надпись» - несовместны.

Получение студентом по одной дисциплине на экзамене оценок 5, 4, 3 – события несовместные, а получение тех же оценок по трем дисциплинам – событие совместное.

2. **Равновозможные события**.

События называются ***равновозможными***, если в результате испытания по условиям симметрии ни одно из этих событий не является объективно более возможным.

Пример. Извлечение туза, валета, короля или дамы из колоды карт; появление герба или решки при подбрасывании монеты – события равновозможные. Так при подбрасывании монеты предполагается, что она изготовлена из однородного материала, имеет правильную цилиндрическую форму, и наличие чеканки не оказывает влияние на выпадение той или иной стороны монеты.

3. **Полная группа событий.**

Несколько событий образуют ***полную группу событий,*** если в результате испытания непременно произойдет хотя бы одно из них. Другими словами, появление хотя бы одного из событий полной группы есть достоверное событие.

Пример. Студент на экзамене достался билет с двумя теоретическими вопросами.

События А - учащийся знает оба вопроса; В – учащийся знает 1 вопрос, но не знает второго; С – учащийся знает 2 вопрос, но не знает первого; Д – учащихся знает хотя бы один вопрос; Е – учащийся не знает ни одного вопроса образуют полную группу событий. Среди них имеются как несовместные события А и В, А и Е и др., так и совместные – В и Д, С и Д.

Далее будет часто использовать частный случай: если событий, образующие ***полную группу, попарно несовместны***, то в результате испытания появится ***одно и только одно из этих событий***.

Пример. Стрелок произвел выстрел по цели. Обязательно произойдет одно из следующих событий: попадание или промах. Эти два несовместных события образуют полную группу.

2) Классическое определение вероятности

Одним из основных понятий теории вероятностей является вероятность. Существует несколько определений этого понятия.

В повседневной жизни в разговоре часто используется слово «вероятный». Например, «к вечеру, вероятно, пойдет дождь», «это невероняый случай», «вероятнее всего он опоздает». При употреблении этого слова интуитивно оценивается возможность наступления того или иного события. Можно сказать, что одно событие наступит чаще, чем другое. В этом случае говорят, что оно более возможно, т.е. его наступление более вероятно. Естественно, при такой оценке человеку помогает здравый смысл и жизненный опыт.

Пример. Пусть в урне содержится 6 одинаковых, тщательно перемешанных шаров, причем 2 из них – красные, 3 – синие и 1 белый.

Какая возможность больше: вынуть наудачу из урны цветной шар или белый?

Число, которое характеризует степень возможности появления события называется **вероятностью.**

По данному определению, событию можно поставить в соответствие определенное число – его вероятность. Однако приведенное определение не дает формулу для нахождения этого числа. Эта проблема решается с помощью классического определения вероятности.

Вероятностью события А называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу.

P(A) = m/n – классическое определение вероятности,

где m – число элементарных исходов, благоприятствующих событию A;

n – число всех возможных элементарных исходов испытания.

Рассмотрим формулу для вычисления вероятности на предыдущем примере с шарами.

Пример. Пусть в урне содержится 6 одинаковых, тщательно перемешанных шаров, причем 2 из них – красные, 3 – синие и 1 белый. Из урны достают один шар, какова вероятность, что он окажется красным?

Решение

Событие А - появление красного шара.

Элементарным исходом является каждый из возможных результатов испытания (извлечения шара из урны). В нашем примере возможны следующие 6 элементарных исходов: ω_1 – появился белый шар, ω_2, ω_3 – появился красный шар, ω_4, ω_5, ω_6 – появился синий шар.

Эти исходы образуют полную группу попарно несовместных событий (обязательно появится шар только одного цвета) и они равновозможны (шар вынимают наудачу, они одинаковы и тщательно перемешаны).

Элементарные события, в которых определенное событие наступает, называются *благоприятствующими* этому событию. В нашем примере благоприятствуют событию А (появление красного шара) следующие 2 исхода: ω_2, ω_3.

Следовательно, вероятность того, что взятый шар окажется красным: P(A) =2/6 = 1/3.

Это число и дает количественную оценку степени возможности появления красного шара.

1. *Вероятность достоверного события равна единице*.

Если событие достоверно, то каждый элементарный исход испытания благоприятствует событию. В этом случае m=n, следовательно P(A) = m/n = n/n = 1

2. *Вероятность невозможного события равна нулю*.

Если событие невозможно, то ни одна из элементарных исходов испытания не благоприятствует событию. В этом случае m = 0, следовательно, P(A) = m/n = 0/n =0.

3. *Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.*

Действительно, случайному событию благоприятствует лишь часть из общего числа элементарных исходов испытания. В этом случае $0<m<n$, значит $0<m/n<1$, следовательно $0<P(A)<1$.

Итак, **вероятность любого события удовлетворяет двойному неравенству $0\le P(A)\le 1$**

3) Примеры задач на вычисление вероятностей по классической формуле

Задача 1. В ящике имеется 50 одинаковых деталей, из которых 5 окрашенных. Наудачу вынимают одну деталь. Найти вероятность того, что извлеченная деталь окажется окрашенной.

Решение

Событие А – вынута окрашенная деталь

n = 50
m = 5
P(A) = 5/50 = 0,1 = 10%

Задача 2. Набирая номер телефона, абонент забыл одну цифру и набрал ее наудачу. Найти вероятность того, что набрана нужная цифра.
Решение
Событие А – набрана нужная цифра
n = 10
m = 1
P(A) = 1/10 = 0,1 = 10%

Задача 3. Какова вероятность появления четного числа очков при бросании игрального кубика?
Решение
Событие А – выпало четное число очков
n = 6 (т.к. у игрального кубика 6 граней)
m = 3 (т.к. 3 исхода появления четного числа очков при выпадении чисел 2, 4, 6)
P(A) = 3/6 = 0,5 = 50%

Задача 4. Набирая номер телефона, абонент забыл последние две цифры и, помня лишь, что цифры различны, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.
Решение
Событие А – набраны две нужные цифры
m = 1
Всего можно набрать столько различных цифр, сколько может быть составлено размещений из десяти цифр по две.
n = A_{10}^{2}

$$A_{10}^{2} = \frac{10!}{8!} = 9 * 10 = 90$$
P(A) = 1/90 = 0,01111 = 1,1%

Задача 5. В группе 30 студентов. Из них 12 юношей, остальные девушки. Известно, что к доске должны быть вызваны двое учащихся. Какова вероятность, что это девушки?
Решение
Событие А – к доске вызваны две девушки.
Всего 30 студентов
Юношей – 12
Девушек – 18
n = C_{30}^{2}
m = C_{18}^{2}

$$C_{30}^{2} = \frac{30!}{2!\,28!} = \frac{30 * 29}{2} = 435$$
$$C_{18}^{2} = \frac{18!}{2!\,16!} = \frac{18 * 17}{2} = 153$$

P(A) = 153/435 = 0,3517 = 35,2%

Задача 6. В мешочке имеются 5 одинаковых кубиков. На всех гранях каждого кубика написана одна из следующих букв: о, п, р, с, т. Найти вероятность того, что на вынутых по одному и расположенных «в одну линию» кубиках можно будет прочесть слово
А) «трос».
Б) «спорт»
Решение
А) Событие А – на кубиках можно прочесть слово «трос»
n = A_5^4
m = 1
$A_5^4 = \frac{5!}{1!} = 120$

P(A) = 1/120 = 0,00833 = 0,83%

А) Событие В – на кубиках можно прочесть слово «спорт»
n = P_5 = 120
m = 1

P(A) = 1/120 = 0,00833 = 0,83%

Задача 7. Ребенок имеет на руках 5 карточек с буквами: А, К, К, Л, У. Найти вероятность того, что на вынутых по одной и расположенных «в одну линию» карточках можно будет прочесть слово «кукла».
Решение
Событие А – на карточках можно прочесть слово «кукла»
n = $\overline{P_5}$
m = 1

$\overline{P_5} = \frac{5!}{1!2!1!1!} = \frac{1*2*3*4*5}{2} = 60$

P(A) = 1/60 = 0,0166 = 1,7%

Задача 8. В партии из 10 деталей 7 стандартных. Найти вероятность того, что среди 6 взятых наудачу деталей 4 стандартных.
Решение
Событие А – среди отобранных 6 деталей 4 стандартных
N = 10
n = 7
m = 6
k = 4
Общее число возможных элементарных исходов равно числу способов, которыми можно извлечь 6 деталей из 10, т.е. числу сочетаний из 10 элементов по 6 элементов ($\boldsymbol{C_{10}^6}$).
Определим число исходов, благоприятствующих событию А.
4 стандартных детали можно взять из 7 стандартных $\boldsymbol{C_7^4}$ способами.
Остальные 6 – 4 = 2 детали должны быть нестандартными, взять 2 нестандартных детали из 10 – 7 = 3 нестандартных деталей можно $\boldsymbol{C_3^2}$ способами. Следовательно, число благоприятных исходов равно $\boldsymbol{C_7^4 \cdot C_3^2}$.

Данные рассуждения объясняют формулу: Р(А) = $\frac{C_n^k\, C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}$

Р(А) = $\frac{C_7^4\, C_3^2}{C_{10}^6} = \frac{1}{2} = 50\%$

Для решения задач следующего типа:

В партии из N деталей имеется *n* стандартных. Наудачу отобраны *m* деталей. Найти вероятность того, что среди отобранных деталей ровно *k* стандартных.

можно использовать формулу: $P = \frac{C_n^k\, C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}$

Лекция № 5. Операции над событиями. Вероятность противоположного события. Сумма событий

План

1. Вероятность противоположного событий
2. Операции над событиями. Понятие суммы события.
3. Сумма несовместных событий
4. Сумма совместных событий

1) Вероятность противоположного событий

Противоположными называют два единственно возможных события, образующих полную группу. Если одно из двух противопложных событий обозначается через А, то противоположное через $\overline{A}$.

Например. а) попадание и промах при выстреле по цели – противоположные события. Если А – попадание, то $\overline{A}$ – промах.

б) Из ящика наудачу взята деталь. События «появилась стандартная деталь» и «появилась нестандатная деталь» противоположные.

Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

Если вероятность одного из противоположных событий обозначена через **p**, то вероятность другого события обозначают через **q**:

p + q = 1.

Данную формулу можно расширить на любое конечное число событий: Сумма вероятностей событий, образующих полную группу несовместных событий, равна единице: $P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1$.

Пример 1. Вероятность того, что день будет дождливым, р = 0,7. Найти вероятность того, что день будет ясным.

Решение. События «день дождливый» и «день ясный» - противоположные, поэтому искомая вероятность: q = 1 – p = 0,3.

Пример 2. Консультационный пункт института получает пакеты с контрольными работами из городов А, В и С. Вероятность получения пакета из города А равна 0,7, из города В – 0,2. Найти вероятность того, что очередной пакет будет получен из города С.

Решение. События А – «пакет получен из города А», В – «пакет получен из города В», С – «пакет получен из города С» образуют полную группу несовместных событий, поэтому сумма вероятностей равна единице:

$0{,}7 + 0{,}2 + P = 1$. Следовательно $P(C) = 0{,}1$.

2) Операции над событиями. Понятие суммы события

Простые случайные события могут образовывать сложные события, а сложные – еще более сложные. Например, событие А, которое заключается в выпадении четного числа очков в эксперименте, образуется из трех простых случайных событий:

А2 – выпадение двух очков,

А4 – выпадение четырёх очков,

А6 – выпадение шести очков.

Теория вероятностей представляет возможность по известным вероятностям простых событий рассчитывать вероятности сложных событий. Но, чтобы воспользоваться этой возможностью, необходимо обладать умением раскладывать сложные события на простые или составлять из простых событий сложные.

Для составления сложных событий используются 2 операции над событиями: сумма и произведение.

Суммой А + В двух событий А и В называют событие, состоящее в появлении события А, или события В, или обоих этих событий.

Например, если из орудия произведены два выстрела и А – попадание при первом выстреле, В – попадание при втором выстреле, то А + В – попадание при первом выстреле, или при втором выстреле, или в обоих выстрелах.

3) **Сумма несовместных событий**

Если два события А и В – несовместные, то А + В – событие, состоящее в появлении одного из этих событий.

Суммой нескольких событий называют событие, которое состоит в появлении хотя бы одного из этих событий.

Теорема сложения вероятностей несовместных событий.

Вероятность появления одного из двух несовместных событий, равна сумме вероятностей этих событий: $\mathbf{P(A + B) = P(A) + P(B)}$

Следствие. Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий, равна сумме вероятностей этих событий:

$P(A_1+A_2+...+A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$

Пример 3. В урне 30 шаров: 10 красных, 5 синих и 15 белых. Найти вероятность появления цветного шара.

Решение. Появление цветного шара означает появление либо красного, либо синего шара.

Событие А – появление красного шара. $P(A) = 10/30=1/3$

Событие В – появление синего шара. $P(B) = 5/30 = 1/6$.

События А и В несовместны (появление шара одного цвета исключает появление шара другого цвета), поэтому теорема сложения применима.

$P(A + B) = P(A) + P(B) = 1/3 + 1/6 = 1/2$

Пример 4. Стрелок стреляет по мишени, разделенной на 3 области. Вероятность попадания в первую область равна 0,45, во вторую – 0,35. Найти вероятность того, что стрелок при одном выстреле попадет либо в первую, либо во вторую область.

Решение. События А – «стрелок попал в первую область» и В – «стрелок попал во вторую область» - несовместны (попадание в одну область исключает попадание в другую), поэтому теорема сложения применима.

P(A + B) = 0,45+0,35 = 0,8

Пример 5. В ящике имеется 11 деталей, из которых 5 стандартных. Найти вероятность того, что среди 4 наудачу извлеченных деталей есть хотя бы одна стандартная.

Решение.

1 способ. Требование – хотя бы одна из 4 деталей стандартная будет осуществлено, если произойдет любое из следующих 4 несовместных событий: А – одна деталь стандартна, В – две детали стандартных, С – три детали стандартных, Д – 4 детали стандартных.

По теореме сложения вероятностей P(A+B+C+Д) = P(A)+P(B)+P(C)+P(Д).

Найдем вероятности событий А, В, С и Д, используя формулу $P(A) = \frac{C_n^k C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}$

а) P(A) = $\frac{C_5^1 C_6^3}{C_{11}^4} = \frac{5*20}{330} = \frac{100}{330}$

б) P(B) = $\frac{C_5^2 C_6^2}{C_{11}^4} = \frac{10*15}{330} = \frac{150}{330}$

в) P(C) = $\frac{C_5^3 C_6^1}{C_{11}^4} = \frac{10*6}{330} = \frac{60}{330}$

г) P(Д) = $\frac{C_5^4 C_6^0}{C_{11}^4} = \frac{5*1}{330} = \frac{5}{330}$ (пояснение к расчету $C_6^0 = \frac{6!}{6!*0!} = 1, \text{т.к.}\ 0! = 1$)

P(A+B+C+Д) = $\frac{100}{330} + \frac{150}{330} + \frac{60}{330} + \frac{5}{330} = \frac{315}{330} = 0{,}95$

2 способ. События А - «среди извлеченных деталей есть хотя бы одна стандартная» и $\overline{A}$ - «среди извлеченных деталей нет ни одной стандартной» - противоположные.

P(A) = 1 – P($\overline{A}$)

Найдем P($\overline{A}$).

n - общее число способов, которыми можно извлечь 4 детали из 11 равно C_{11}^4 = 330.

Число нестандартных деталей равно 11 - 5 =6, из этого числа извлечь 4 нестандартных детали можно C_6^4 способами.

C_6^4= 15

Поэтому вероятность того, что среди извлеченных 4 деталей нет ни одной стандартной, равна: P($\bar{A}$) =$C_6^4/C_{11}^4 = 0{,}045$.

Искомая вероятность P(A) = 1 – P($\bar{A}$) = 1 - 0,045 = 0,95

4) Сумма совместных событий

Два события называются совместными, если появление одного из них не исключает появление другого в одном и том же испытании.

Например, А – появление четырех очков при бросании игральной кости; В – появление четного числа очков. События А и В – совместные.

Теорема сложения вероятностей совместных событий. Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

P(A+B) = P(A) + P(B) – P(A*B)

Пример 6. Вероятность попадания в цель при стрельбе первого и второго орудий соответствено равны: p_1=0,7; p_2=0,8. Найти вероятность попадания при одном залпе (из обоих орудий) хотя бы одним из орудий.

Решение

Событие А – первое орудие попало в цель, P(A) = 0,7

Событие В – второе орудие попало в цель, P(B) = 0,8

События А и В совместные, т.к. при одном залпе в цель могут попасть и первое, и второе орудие.

Вероятность попадания в цель каждым из орудий не зависит от результатов стрельбы из другого орудия, поэтому события А и В независимы.

Вероятность события А*В (оба орудия дали попадание) Р(А*В) = 0,7*0,8 = 0,56

*Произведение событий будет рассмотрено на следующей лекции, для независимых событий Р(А*В) = Р(А) * Р(В).*

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A*B) = 0,7 + 0,8 - 0,56 = 0,94$$

Сумма трех совместных событий вычисляется по формуле:

$$\mathbf{P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC).}$$

Лекция № 6. Произведение событий. Условная вероятность

План

1. Понятие произведения событий
2. Произведение независимых событий
3. Произведение зависимых событий. Условная вероятность.

1) Понятие произведения событий

Произведением двух событий А и В называют событие А·В, состоящее в совместном появлении этих событий.

Например, если А – деталь годная, В – деталь окрашенная, то А·В – деталь годна и окрашена.

Произведение нескольких событий называют событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий. Например, если А, В, С – появление «герба» соответственно в первом, втором и третьем бросании монеты, то А·В·С – выпадение «герба» во всех трех испытаниях.

2) Произведение независымых событий

Событие В называют независимым от события А, если появление события А не изменяет вероятности события В.

Пример независимых событий: первое орудие поразило цель и второе орудие поразило цель.

Теорема произведения для независимых событий: для независимых событий вероятность совместного появления событий равна произведению вероятностостей этих событий:

$$\mathbf{P(A \cdot B) = P(A)\ P(B)}$$

Следствие. Вероятность совместного появления нескольких событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n)$$

Пример 1. Найти вероятность совместного поражения цели двумя орудиями, если вероятность поражения цели первым орудием равна 0,8; а вторым орудием – 0,7.

Решение

События А – поражение цели первым орудием и В – поражение цели вторым орудием незасивисы.

Р(А) = 0,8

Р(В) = 0,7

Р(А·В) = 0,8 * 0,7 = 0,56

Пример 2. Имеется 3 ящика, содержащих по 10 деталей. В первом ящике 8, во втором 7 и в третьем 9 стандартных деталей. Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что все детали окажутся стандартными.

Решение

События А – из 1 ящика вынули стандартную деталь, В – из 2 ящика вынули стандартную деталь, С – из 3 ящика вынули стандартную деталь, независимы.

$P(A) = 8/10$

$P(B) = 7/10$

$P(C) = 9/10$

$P(A \cdot B \cdot C) = 0,8*0,7*0,9 = 0,504$

Пример 3. Вероятности попадания в цель при стрельбе из трех орудий: 0,8; 0,7; 0,9. Найти вероятнсть хотя бы одного попадания при одном залпе их всех орудий.

Решение

1 способ

По формуле сложения для 3 совместных событий:

$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) – P(AB) – P(BC) – P(AC) + P(ABC)$

2 способ

А – попадание первого орудия. В – попадание второго орудия. С – попадание третьего орудия. Эти события независимы.

Вероятности событий, противоположных событиям А. В, С соотвественно равны:

$q_1=0,2$; $q_2=0,3$; $q_3=0,1$.

$q_1q_2q_3= 0,2*0,3*0,1=0,006$ – не попадет ни одно орудие.

Искомая вероятность равна: $P=1-q_1q_2q_3 = 0,994$

Для задач, в которых требуется определить вероятность хотя бы одного события используется формула:

$$\mathbf{P =1 - q_1q_2q_3\ldots q_n}$$

Пример 4. Вероятность того, что при аварии сработает первый сигнализатор равна 0,98; второй сигнализатор – 0,93. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор.

Решение

Обозначим A_1 – сработал первый сигнализатор; A_2 – сработал второй сигнализатор.

Пусть

$P(A_1) = p_1$, $P(\overline{A_1}) = q_1$

$P(A_2) = p_2$, $P(\overline{A_2}) = q_2$

Условие, что при аварии сработает только один сигнализатор, выполняется в двух случаях:

- 1 сигнализатор сработал, второй нет: p_1q_2
- 2 сигнализатор сработал, первый нет: p_2q_1

Эти случаи несовместны, поэтому вероятность появления только одного из них равна: $P = p_1q_2 + p_2q_1$

$p_1 = 0,98$

$q_1 = 0,02$

$p_2 = 0,93$

$q_2 = 0,07$

$P = 0,98*0,07 + 0,93*0,02 = 0,0872$

Для задач, в которых требуется определить вероятность только одного события из двух, используется формула:

$$P = p_1q_2 + p_2q_1$$

Используя аналогичные рассуждения, можно вывести похожую формулу для расчета вероятности появления только одного события из трех.

3) Произведение зависымых событий. Условная вероятность

Случайное событие определено как событие, которое при осуществлении совокупности условий может произойти или не произойти. Если при вычислении вероятности события никаких других ограничений, кроме этих условий не налагается, то такую вероятность называют безусловной. Если же налагаются и другие дополнительные условия, то вероятность называют условной.

Условной вероятностью $P_A(B)$ называют вероятность события В, вычисленную в преположении, что событие А наступило.

Теорема произведения вероятностей для зависимых событий. Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:

$$P(AB) = P(A)\ P_A(B) \text{ или } P(AB) = P(B)\ P_B(A)$$

Пример 5. У сборщика имеется 3 конусных и 7 эллиптических валиков. Сборщик взял один валик, а потом второй. Найти вероятность,что первый из взятых валиков конусный, а второй эллиптический.

Решение

Событие А – первый валик конусный: $P(A) = 3/10$.

Событие В – второй валик эллиптический: $P_A(B) = 7/9$

$P(AB) = 7/30$

Лекция № 7. Формула полной вероятности. Формула Байеса

План

1. Формула полной вероятности
2. Формула Байеса

1) Формула полной вероятности

При вычислении вероятностей сложных событий используется формула полной вероятности.

Формула полной верятности позволяет определить вероятность события А, которое может наступить при условии появления одного из несовместных событий B_1, B_2, … B_n, образующих полную группу.

$$P(A) = P(B_1)\cdot P_{B1}(A) + P(B_2)\cdot P_{B2}(A) + \ldots + P(B_n)\cdot P_{Bn}(A)$$

Пример 1. В первом ящике содержится 20 деталей, из них 15 стандартных; во втором 30 деталей, из них 24 стандартных; в третьем – 10 деталей, из них 6 стандартных. Найти вероятность того, что наудачу извлеченная деталь из наудачу взятого ящика – стандартная.

Решение

1. Обозначим через А – событие«взятая наудачу деталь стандартна».

Это событие возможно при осуществлении одной из трех гипотез:

Событие B_1 – деталь извлечена из первого ящика
Событие B_2 – деталь извлечена из второго ящика
Событие B_3 – деталь извлечена из третьего ящика

2. Определим вероятности событий B_1, B_2 и B_3.
Вероятность того, что деталь взята из первого ящика $P(B_1) = 1/3$ (т.к. все ящки одинаковы и нужно выбрать один ящик из трех)
Вероятность того, что деталь взята из первого ящика $P(B_2) = 1/3$
Вероятность того, что деталь взята из первого ящика $P(B_3) = 1/3$
3. Определим условные вероятности.
Условная вероятность того, что из 1 ящика была извлечена стандартная деталь: $P_{B1}(A) = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$ (в 1 ящике 15 стандартных деталей, всего – 20 деталей)
Условная вероятность того, что из 2 ящика была извлечена стандартная деталь: $P_{B2}(A) = \frac{24}{30} = \frac{4}{5}$ (во 1 ящике 24 стандартных деталей, всего – 30 деталей)
Условная вероятность того, что из 3 ящика была извлечена стандартная деталь: $P_{B3}(A) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ (в 1 ящике 6 стандартных деталей, всего – 10 деталей)

4. По формуле полной вероятности определим вероятность события A:

$$P(A) = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3} + \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{3} + \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{4}{15} + \frac{1}{5} = \frac{43}{60} = 0{,}72.$$

Ответ: P(A) = 0,72

Пример 2. Сборщик получил 3 коробки деталей, изготовленных заводом №1 и 2 коробки деталей, изготовленных заводом №2. Вероятность того, что деталь завода №1 стандартна, равна 0,8, а завода №2 – 0,9. Сборщик наудачу извлек деталь из наудачу взятой коробки. Найти вероятность, что извлеченная деталь стандартна.

Решение

1. Обозначим через A – событие «взятая наудачу деталь стандартна»
Событие B_1 – деталь изготовлена первым заводом;
Событие B_2 – деталь изготовлена вторым заводом
2. Определим вероятности событий B_1, B_2 и B_3.
$P(B_1) = 3/5$ (всего 5 коробок, 3 коробки с 1 завода)
$P(B_2) = 2/5$ (всего 5 коробок, 2 коробки с 2 завода)

3. Определим условные вероятности.
$P_{B1}(A) = 0{,}8$ (по условию задачи)
$P_{B2}(A) = 0{,}9$ (по условию задачи)

4. По формуле полной вероятности определим вероятность события A:

$$P(A) = 0{,}8\cdot\frac{3}{5} + 0{,}9\cdot\frac{2}{5} = 0{,}56.$$

Ответ: P(A) = 0,56

2) Формула Байеса

Чтобы оценить вероятности гипотез B_1, B_2, … B_n, после того как стал известен результат испытания, используется **формула Байеса**.

$$P_A(\boldsymbol{B_i}) = \frac{\boldsymbol{P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)}}{\boldsymbol{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A) + P(B_2)\cdot P_{B_2}(A) + \cdots + P(B_n)\cdot P_{B_n}(A)}}$$

Пример 3. На заводе, изготовляющем болты, первая машина производит 25%, вторая - 35%, третья - 40% всех изделий. В их продукции брак составляет соответственно 5, 4 и 2%. Случайно выбранный из продукции болт оказался дефектным. Какова вероятность того, что он был произведен первой машиной?

Решение

1. Обозначим через А – событие «выбран болт с дефектом»

B_1 – болт произведен 1 машиной; B_2 – болт произведен 2 машиной; B_3 – болт произведен 3 машиной

2. По условию задачи имеем:

$P(B_1) = 25\% = 0{,}25$ $\quad P(B_2) = 35\% = 0{,}35$ $\quad P(B_3) = 40\% = 0{,}4$

$P_{B1}(A) = 5\% = 0{,}05$

$P_{B2}(A) = 4\% = 0{,}04$

$P_{B3}(A) = 2\% = 0{,}02$

Нужно обязательно переводить проценты в десятичные цифры

3. По формуле Байеса определим вероятность гипотезы B1, при условии что выбран болт с дефектом:

$$\mathrm{P_A(B_1)} = \frac{0{,}25 \cdot 0{,}05}{0{,}25 \cdot 0{,}05 + 0{,}35 \cdot 0{,}04 + 0{,}4 \cdot 0{,}02} = \frac{0{,}0125}{0{,}0345} = 0.36 = 36\%$$

Ответ: $\mathrm{P_A(B_1)} = 36\%$

Пример 4. В турслете участвуют 70% девятиклассников и 30% десятиклассников. Среди девятиклассников 60% мальчиков, а среди десятиклассников 40% мальчиков. Все мальчики по очереди дежурят у костра, сменяясь каждый день. Найти вероятность того, что в случайно выбранный день у костра дежурит девятиклассник.

Решение

1. Обозначим через А – событие «у костра дежурит мальчик»

B_1 – дежурит девятиклассник; B_2 – дежурит десятиклассник

2. По условию задачи имеем (числа переведы в проценты):

$P(B_1) = 0{,}7$ $\quad P(B_2) = 0{,}3$

$P_{B1}(A) = 0{,}6$

$P_{B2}(A) = 0{,}4$

4. По формуле Байеса определим вероятность гипотезы B1, при условии что дежурит мальчик:

$$\mathrm{P_A(B_1)} = \frac{0{,}7 * 0{,}6}{0{,}7 \cdot 0{,}6 + 0{,}4 \cdot 0{,}3} = \frac{21}{27} = 0.78 = 78\%$$

Ответ: $\mathrm{P_A(B_1)} = 78\%$

Лекция № 8. Схемы Бернулли. Формула Бернулли.

План

1. Схемы Бернулли
2. Формула Бернулли

1) Схемы Бернулли

При практическом применении теории вероятностей часто приходится встречаться с задачами, в которых опыты повторяются неоднократно. В результате каждого опыта событие А может появиться или нет, причем интересует не результат каждого отдельного опыта, а общее число появлений события А в результате серии опытов.

Пример.

1. Если производится серия выстрелов по цели, то, как правило, интересует не результат каждого выстрела, а общее число попаданий.

В таких задачах требуется уметь определять вероятность любого заданного числа появления событий в результате серии опытов.

Схема Бернулли предполагает решение задач следующего типа:

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие А может либо появиться, либо не появиться. Требуется вычислить вероятность того, что при n испытаниях событие А осуществится ровно k раз, и, следовательно, не осуществится n-k раз.

Обозначим:

n – количество независимых испытаний

k – количество появлений события А в n испытаниях

p – вероятность появления события А в каждом из n испытаниях

q = 1 – p – вероятность не появления события А в каждом из n испытаниях

Для применения схемы Бернулли должны быть выполнены следующие условия:

- Каждое испытание имеет ровно два исхода, условно называемых успехом и неудачей.
- Независимость испытаний: результат очередного эксперимента не должен зависеть от результатов предыдущих экспериментов.
- Вероятность успеха должна быть постоянной (фиксированной) для всех испытаний.

Для определения вероятностей в схеме Бернулли используются формула Бернулли, Пуассона и формулы Лапласа.

2) **Формула Бернулли** – применяется, когда n<20; k< 10 (n, k малы); p>0,1

$$\mathrm{P}_{\mathbf{n}}(\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{n}!}{\mathbf{k}!\,(\mathbf{n}-\mathbf{k})!}\mathbf{p}^{\mathbf{k}}\mathbf{q}^{\mathbf{n}-\mathbf{k}} = \mathbf{C}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{k}}\mathbf{p}^{\mathbf{k}}\mathbf{q}^{\mathbf{n}-\mathbf{k}}$$

Пример 1. Сессию сдают 12 студентов, вероятность сдачи каждого студента равна 0,9. Какова вероятность того, что сдадут 9 из них?

Дано:

n= 12; k = 9; p=0,9; q =0,1

Решение

$$P_{12}(9) = C_{12}^{9}\cdot 0{,}9^{9}\cdot 0{,}1^{12-9} = \frac{12!}{9!\cdot 3!}\cdot 0{,}387\cdot 0{,}001 \approx 0{,}085 = 8{,}5\%$$

Пример 2. В цехе 6 моторов. Для каждого мотора вероятность того, что он в данный момент включен, равна 0,8. Найти вероятность, что в данный момент:

А) включено менее трех моторов

Б) включено не менее трех моторов

В) включено более трех моторов

Решение

А) $P_6(k<3) = P_6(0) + P_6(1) + P_6(2)$

$P_6(0)= \frac{6!}{0!6!}0{,}8^0 \cdot 0{,}2^6 = 0{,}000064$
$P_6(1)= \frac{6!}{1!5!}0{,}8^1 \cdot 0{,}2^5 = 6 * 0{,}8 * 0{,}00032 = 0{,}001536$
$P_6(2)= \frac{6!}{2!4!}0{,}8^2 \cdot 0{,}2^4 = 15 * 0{,}64 * 0{,}0016 = 0{,}001536$
$P_6(k<3) = 0{,}000064 + 0{,}001536 + 0{,}001536 = 0{,}0169$

Б) $P_6(k\geq 3) = P_6(3) + P_6(4) + P_6(5) + P_6(6)$ или
$P_6(k\geq 3) = 1 - P_6(k<3) = 1 - 0{,}0169 = 0{,}98$

В) $P_6(k>3) = P_6(4) + P_6(5) + P_6(6)$ или $P_6(k>3) = 1 - P_6(k<3) - P_6(3)$
$P_6(3)= \frac{6!}{3!3!}0{,}8^3 \cdot 0{,}2^3 = 20 * 0{,}512 * 0{,}008 = 0{,}0819$
$P_6(k>3) = 1 – 0{,}0169 – 0{,}0819 = 0{,}90$

Лекция № 9. Вычисление вероятностей событий в схеме Бернулли. Формулы Муавра-Лапласа в схеме Бернулли. Формула Пуассона

План
1. Формулы Муавра-Лапласа
2. Формула Пуассона

1) Формулы Муавра-Лапласа

При некоторых n и k вычисления по формуле Бернулли могут быть затруднительными. Например, при n=40, k=30 в формуле Бернулли вычисляется не на каждом калькуляторе из-за большого числа множителей, а возведение в степень дает дробь, слишком близкую к нулю, поэтому появляется вторая формула: формула Муавра-Лапласа:

Асимптотическая формула Лапласа или локальная теорема Муавра-Лапласа – применяется, когда n>20; k>10 (n,k большие), p>0,1

$$\boldsymbol{P_n(k) \cong \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x),}$$

где $\boldsymbol{\varphi}$(x) - функция Лапласа, значения которой находятся по специальной таблице для $\boldsymbol{x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}}$ (таблица приведена в конце лекции).

Свойства φ(x):
- φ(x): - четная, т.е. $\varphi(-x) = \varphi(x)$:
- при x>4 значения в таблице отсутствуют (φ(x) практически равна нулю).

Пример 1. Игральный кубик бросают 60 раз. Найти вероятность того, что «4» очка выпадет 13 раз.
Дано:
n = 60; k = 13;
p = 1/6 (всего 6 исходов – 6 граней, благоприятствующий 1 исход – грань с 4 очками)
q = 5/6
Решение
1) Определяем x

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{13 - 60 \cdot \frac{1}{6}}{\sqrt{60 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}} = \frac{13 - 10}{\sqrt{\frac{25}{3}}} \approx \frac{3}{\sqrt{8,33333}} \approx \frac{3}{2,887} \approx 1,04$$

2) По таблице определяем $\varphi(x) = \varphi(1,04) \approx 0,2323$
3) Находим вероятность

$$P_n(k) \cong \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{60 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}} \cdot 0,2323 \approx \frac{1}{2,887} \cdot 0,2323 \approx 0,080 = 8\%$$

Интегральная теорема Лапласа – применяется для определения вероятности наступления события в некотором интервале

Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события А равна p, событие наступит не менее k_1 и не более k_2 раз приближенно равна:

$$\mathbf{P_n(k_1,k_2) = \Phi(x'') - \Phi(x')},$$ где

Ф(x) – функция Лапласа, $x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$; $x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$

$\Phi(-x) = -\Phi(x)$

Пример 2. Вероятность того, что деталь не прошла проверку ОТК, равна p = 0,2. Найти вероятность того, что среди 400 случайно отобранных деталей окажется непроверенных от 70 до 100 деталей.

Дано:

p = 0,2
q= 0,8
n = 400
$k_1 = 70$
$k_2 = 100$

Решение

$P_{400}(70,100) = \Phi(x'') - \Phi(x')$

$x' = \frac{70-400*0,2}{\sqrt{400*0,2*0,8}} = -1,25$

$x'' = \frac{100-400*0,2}{\sqrt{400*0,2*0,8}} = 2,5$

$P_{400}(70,100) = \Phi(2,5) - \Phi(-1,25) = \Phi(2,5) + \Phi(1,25) = 0,4938 + 0,3944 = 0,8882$

2) Формула Пуассона

Формула Муавра-Лапласа тоже имеет ограничения, при очень больших n, маленьких k и p<0,1 она не работает. В таком случае работает третья формула.

Формула Пуассона – применяется при больших n, маленьких k и p<0,1.

$$\boldsymbol{P_n(k) \cong \frac{(np)^k}{k!} \cdot e^{-np}},$$

где e = 2,7 (основание натурального логарифма)

Пример 3. Вероятность повреждения товара равна 0,02. Найти вероятность того, что из ста единиц товара испортится ровно 3.

Дано:
n= 100
k = 3
p = 0,02
Решение
$P_n(k) \cong \frac{(np)^k}{k!} \cdot e^{-np} \approx \frac{(100 \cdot 0{,}02)^3}{3!} \cdot 2{,}7^{-100*0{,}02} = \frac{2^3}{6} \cdot 2{,}7^{-2} = \frac{8}{6 \cdot 2{,}7^2} \approx 0{,}183$ = 18,3%

Лекция № 10. Дискретная случайная величина (ДСВ). Графическое изображение распределения ДСВ. Функции от ДСВ

План
1. Понятие случайной величины. Виды случайных величин
2. Закон распределения случайной величины
3. Способы задания закона распределения ДСВ

1) Понятие случайной величины. Виды случайных величин

Случайное событие – это событие, которое в результате испытания может произойти или не произойти.

Пример. Появление определенного количества очков при бросании игральной кости. При бросании игральной кости могут появиться числа 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Наперед определить число выпавших очков невозможно, т.к. оно зависит от многих случайных причин. Поэтому число очков – это **величина случайная** и числа 1, 2, 3, 4, 5 и 6 – **возможные значения этой величины**.

Случайной называют величину, которая в результате испытания примет только одно возможное и заранее не известное значение, зависящее от случайных причин.

Случайные величины обозначают большими буквами - **X, Y, Z**

Возможные значения случайных величин обозначают соответствующими строчными буквами **x, y, z**.

Примеры случайных величин:
- количество студентов, присутствующих на лекции;
- количество солнечных дней в году;
- время ожидания общественного транспорта на остановке;
- температура окружающей среды.

Виды случайных величин:

1. **Дискретной (прерывной) называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями.** Число возможных значений дискретной случайной величины (ДСВ) может быть конечным или бесконечным.

Пример 1. Количество студентов, присутствующих на лекции.

Возможные значения ДСВ при группе в 25 человек: 1, 2, 3, …, 25.

Пример 2. Число выпавших «гербов» при пятикратном бросании монеты.

Возможные значения ДСВ: 1, 2, 3, 4, 5.

Пример 3. Число бракованных изделий в случайно отобранной партии из 20 изделий.

Возможные значения ДСВ: 1, 2, 3, …, 20.

В этих примерах значения ДСВ отделены одно от других промежутков, внутри этих промежутков нет других возможных значений случайной величины. Таким образом, случайная величина принимает отдельные, изолированные возможные значения.

2. **Непрерывной называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.** Число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно.

Пример 1. Дальность полета артиллерийского снаряда.

Пример 2. Наружный диаметр трубы.

Во этих примерах случайная величина может принять любое из значений определенного промежутка (a, b). Здесь нельзя отделить одно возможное значение от другого промежутком, не содержащим возможных значений случайной величины.

Дискретная случайная величина (ДСВ)

2) Закон распределения случайной величины

Как задать дискретную случайную величину? Указать лишь ее возможные значения недостаточно, так как случайные величины могут иметь одинаковые перечни возможных значений, а вероятности их – различные.

Например, при бросании двух игральных кубиков такие значения случайной величины как 2 и 8 находятся в неодинаковых условиях. Значение $x=2$ может появиться только в одном случае, когда появится значения 1 и 1; а значение $x = 8$ может появиться в пяти случаях. Т.е. вероятность появления двух очков меньше, чем вероятность появления восьми очков. Таким образом, перечисление всех возможных значений случайно величины не дает достаточно полного представления о ней.

Для задания дискретной случайной величины необходимо перечислить все возможные ее значения и указать их вероятности.

Законом распределения случайной величины называет соответствие между возможными значениями и их вероятностями.

Будем обозначать: X – случайная величина; P (или p) – вероятность случайной величины

x_i – значения случайной величины; p_i– вероятности значений случайной величины.

3) Способы задания закона распределения ДСВ

Закон распределения ДСВ можно задать таблично, аналитически (в виде формулы) и графически.

1. Табличное задание закона распределения – первая строка – возможные значения, вторая – их вероятности.

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

Так как в одном испытании случайная величина принимает одно и только возможное значения, то события x_1, x_2, …x_n образуют полную группу; следовательно, сумма вероятностей этих событий равна единице: $p_1+p_2+\ldots+p_n=1$

Задача 1. Возможные значения случайной величины таковы: $x_1 = 2$, $x_2 = 5$, $x_3 = 8$. Известны вероятности первых двух возможных значений: $p_1 = 0{,}4$; $p_2 = 0{,}15$. Найти вероятность значения x_3.

Решение

Т.к. $p_1+p_2+p_3=1$, то $p_3 = 1 – 0,4 – 0,15 =$ **0,45**

В задачах на построение табличного закона распределения сначала нужно определить возможные значения случайной величины, потом вероятность каждого значения. Ответом к задаче является таблица.

Задача 2. В денежной лотерее выпущено 100 билетов. Разыгрывается один выигрыш в 500 и двадцать выигрышей по 10 рублей. Найти закон распределения случайной величины X – стоимости возможного выигрыша для владельца одного лотерейного билета.

Решение.

1. Возможные значения выигрыша: $x_1 = 500$, $x_2 = 10$, $x_3 = 0$.

Так как в лотерее можно выиграть 500 рублей, 10 рублей или ничего не выиграть.

2. Вероятности возможных значений

Определяем по классической форму вероятности

$p_1 = 1/100 = 0,01$;

$p_2 = 20/100 = 0,2$;

$p_3 = 1 – (0,01 + 0,2) = 0,79$.

X	**500**	**10**	**0**
p	**0,01**	**0,2**	**0,79**

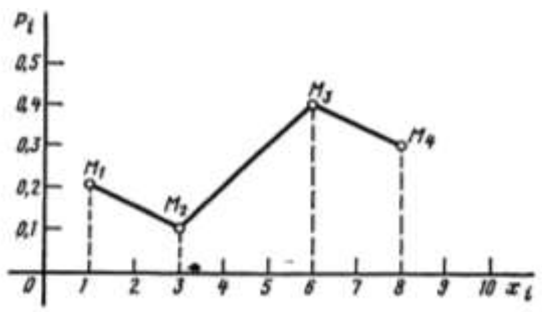
2. Графическое задание закона распределения – многоугольник распределения

Для наглядности закон распределения дискретной случайной величины можно изобразить графически.

Многоугольник распределения – это ломаная линия, соединяющая точки с координатами (x_i, p_i).

Задача 3. Дискретная случайная величина X задана законом распределения. Построить многоугольник распределения.

X	1	3	6	8
P	0,2	0,1	0,4	0,3



3. Интегральная функция распределения дискретной случайной величины

Интегральная функция распределения или просто функция распределения случайной величины X – это функция F(x), которая при каждом значении своего аргумента x численно равна вероятности того, что случайная величина X окажется меньше, чем значение аргумента x.

$$F(x) = P\{X<x\}$$

Функция распределения случайной величины X– это аналитическое задание закона распределения.

Задача 4. Дан ряд распределения дискретной случайной величины:

X	2	3	5	6	8
P	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

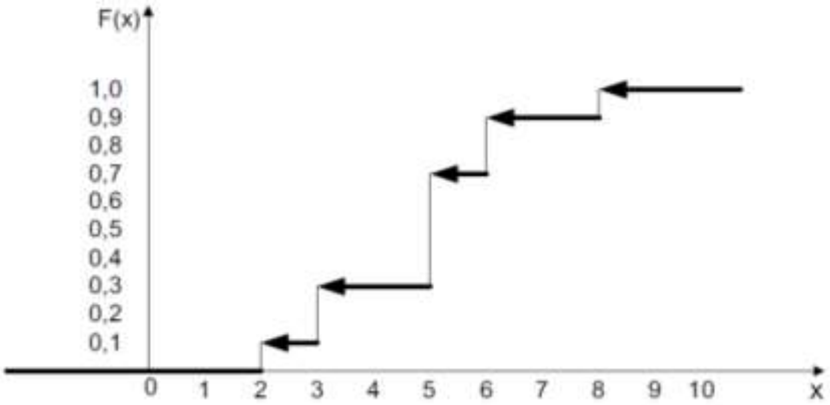
Построить функцию распределения этой случайной величины и ее график.

Решение

1. Если значение аргумента $x \le 2$, то $F(x) = P(X<2) = 0$
2. Если значение аргумента $2<x\le 3$, то $F(x) = P(X<3) = 0,1$
3. Если значение аргумента $3<x\le 5$, то $F(x) = P(X<5) = 0,1 + 0,2 = 0,3$
4. Если значение аргумента $5<x\le 6$, то $F(x) = P(X<6) = 0,1 + 0,2 + 0,4 = 0,7$
5. Если значение аргумента $6<x\le 8$, то $F(x) = P(X<8) = 0,1 + 0,2 + 0,4 + 0,2 = 0,9$
6. Если значение аргумента $x>8$, то $F(x) = 1$.

Окончательный ответ:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x\le 2, \\ 0{,}1, \text{ если } 2<x\le 3, \\ 0{,}3, \text{ если } 3<x\le 5, \\ 0{,}7, \text{ если } 5<x\le 6, \\ 0{,}9, \text{ если } 6<x\le 8, \\ 1, \text{ если } x>8 \end{cases}$$



Как видно из рисунка, **графиком функции распределения дискретной случайной величины является ступенчатая непрерывная линия, определенная на всей числовой оси *x*.**

Функция $F(x)$ изменяется от 0 до 1. Она либо сохраняет свое значение на каждом i-м диапазоне изменения аргумента x, либо скачкообразно увеличивается в точках, соответствующих возможным значениям дискретной случайной величины, т.е. в точках, разделяющих диапазоны.

Лекция № 11. Математическое ожидание, дисперсия и среднеквадратическое отклонение ДСВ

План

1. Математическое ожидание и его свойства.
2. Дисперсия и ее свойства
3. Среднее квадратическое отклонение
4. Мода

1) Математическое ожидание и его свойства

К числовым характеристикам дискретной случайной величины относят математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратичное отклонение и моду.

Математическим ожидание дискретной случайной величины называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности.

X	x_1	x_2	…	x_n
p	p_1	p_2	…	p_n

$$\mathbf{M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \ldots + x_np_n}$$

$$\mathbf{M(X)} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x_i\, p_i}$$

Смысл математического ожидания: математическое ожидание приближенно равно среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины.

Происхождение термина «математическое ожидание» связано с начальным периодом возникновения теории вероятности (16-17 века), когда область ее применения ограничивалась азартными играми. Игрока интересовало среднее значение ожидаемого выигрыша, или, другими словами, математическое ожидание выигрыша.

Пример 1. Найти математическое ожидание случайной величины X, зная ее закон распределения. Определить среднее арифметическое значение.

X	3	5	2
p	0,1	0,6	0,3

Решение

M(X) = 3*0,1 + 5*0,6 + 2*0,3 = 3,9

Среднее арифметическое значение: (3+5+2)/3 = 3,3

Свойства математического ожидания

1. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной: **M(C) = C**.
2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания: **M(CX) = CM(X)**.
3. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий: **M(XY) = M(X)*M(Y)**
4. Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме их математических ожиданий: **M(X+Y) = M(X) + M(Y)**
5. Математическое ожидание M(X) числа появления события A в n независимых испытаниях равно произведению числа испытаний на вероятность появления события в каждом испытании: **M(X) = np**

Пример 2. Независимые случайные величины X и Y заданы следующими законами распределения:

X	5	2	4
P	0,6	0,1	0,3

Y	7	9
P	0.8	0.2

Найти математическое ожидание случайной величины XY.

Решение.
Определим математические ожидания случайных величин X и Y:
M(X) = 5*0,6 + 2*0,1 + 4*0,3 = 4,4
M(Y) = 7*0,8 + 9*0,2 = 7,4
Используя свойство 3 получим:
M(XY) = 4,4*7,4=32,56

Пример 3. Производится 3 выстрела с вероятностями попадания в цель, равными $p_1 = 0,4$; $p_2 = 0,3$; $p_3 = 0,6$. Найти математического ожидание общего числа попаданий.

Решение. Число попаданий при первом выстреле есть случайная величина X_1, которая может принимать только два значения: 1 – попадание с вероятностью 0,4 и 0 – промах с вероятностью 0,6.

Математическое ожидание для X_1 будет равно вероятности попадания (постоянной величине): $M(X_1) = 0,4$

Аналогично $M(X_2) = 0,3$; $M(X_3) = 0,6$.

Общее число попаданий есть случайная величина, состоящая из суммы попаданий в каждом из выстрелов: $X=X_1+X_2+X3$.

Используя свойство 4, получим M(X) = 0,4 + 0,3 + 0,6 = 1,3 попаданий.

Пример 4. Вероятность попадания в цель при стрельбе из орудия p=0,6. Найти математическое ожидание общего числа попаданий, если будет произведено 10 выстрелов.

Решение. Попадание при каждом выстреле не зависит от исходов других выстрелов, поэтому рассматриваемые события независимы и, следовательно, искомое математическое ожидание M(X) = np = 10*0.6 = 6 попаданий.

2) Дисперсия и ее свойства

Дисперсией дискретной случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$\mathbf{D(X) = M[X - M(X)]^2}$$

X – M(X) – отклонение случайной величины от ее математического ожидания.

Для вычисления дисперсии применяется более удобная формула:

$$\mathbf{D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2}$$

Смысл дисперсии: дисперсия характеризует рассеяние случайной величины относительно ее среднего значения.

Пример 5. Найти дисперсию случайной величины X, которая задана следующим законом распределения:

X	2	3	5
p	0,1	0,6	0,3

1 способ

1) Определяем математическое ожидание: M(X) = 2*0,1 + 3*0,6 + 5*0,3 = 3,5
2) Заполняем таблицу:

X	P	X – M(X)	$[X – M(X)]^2$	**$M[X – M(X)]^2$**
2	0,1	2-3,5 = -1,5	$(-1,5)^2$ = 2,25	2,25*0,1 = 0,225
3	0,6	3-3,5 = -0,5	$(-0,5)^2$ = 0,25	0,25*0,6 = 0,15
5	0,3	5-3,5 = 1,5	$(1,5)^2$ = 2,25	2,25 * 0,3 = 0,675
			Сумма	1,05

X	2	3	5
p	0,1	0,6	0,3

2 способ

1) Определяем математическое ожидание M(X) = 3,5
2) Определяем математическое ожидание $M(X^2)$
   $M(X^2) = 2^2 * 0,1 + 3^2 * 0,6 + 5^2 * 0,3 = 13,3$

3) Определяем дисперсию по формуле $D(X) = M(X^2) – [M(X)]^2$
   $D(X) = 13,3 – 3,5^2 = 1,05$

Свойства дисперсии

1. Дисперсия постоянной величины равно 0: **D(C) = 0**.
2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат: **$D(CX) = C^2 D(X)$**.
3. Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равно сумме их дисперсий: **D(X+Y) = D(X) + D(Y)**
4. Дисперсия разности двух независимых случайных величин равно сумме их дисперсий: **D(X-Y) = D(X) + D(Y)**
5. Дисперсия числа появления события А в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность p появления события постоянна, равно произведению числа испытаний на вероятности появления и непоявления события в одном испытании: **D(X) = npq**

3) Среднее квадратическое отклонение

Средним квадратическим отклонением случайной величины X называют квадратный корень из дисперсии:

$$\boldsymbol{\sigma = \sqrt{D(X)}}$$

4) Мода

Мода – это значение X с большей вероятностью

Пример 6. Определить моду

X	2	3	5
p	0,1	0,6	0,3

Мода = 3

Лекция № 12. Понятие биномиального распределения, характеристики

План

1. Биноминальное распределение
2. Распределение Пуассона

1) Биноминальное распределение

Биноминальное распределение имеет место, когда производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие А может либо появится, либо не появится.

Вероятность наступления события во всех испытаниях постоянна и равна р, следовательно, вероятность ненаступления равна q = 1 - p.

Биноминальным называется распределение вероятностей, определяемое формулой Бернулли.

$$\boldsymbol{P_n(k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \cdot p^k \cdot q^{n-k}}$$

Распределение получило название биноминальное, т.к. правую часть формулы Бернулли можно рассматривать как общий член разложения бинома Ньютона.

Ряд биноминального распределения в общем виде:

X	0	1	…	k	…	n
p	q^n	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	…	$C_n^k p^k q^{n-k}$	…	p^n

Числовые характеристики рассматриваемых в лекции распределений можно рассчитывать по общим формулам. Также для каждого типа распределений можно вывести более простые формулы для расчета числовых характеристик.

Числовые характеристики биноминального распределения:

M(X) = np

D(X) = npq

σ(X) = $\sqrt{npq}$

Пример 1. Построить закон распределения случайной величины *X* – количества домов, данных в эксплуатацию в срок, из 3 строящихся. Вероятность сдачи в эксплуатацию в срок для каждого дома одинакова и равна 0,9.

Определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение количества домов, сданных в эксплуатацию.

Решение.

1. Возможные значения случайной величины X:
   x=0 – в срок не сдано ни одного дома
   x=1 – в срок сдан 1 дом
   x=2 – в срок сдано 2 дома
   x=3 – в срок сдано 3 дома

2. Число испытаний (общее число строящихся домов): n= 3.
   Вероятность наступления события А в одном опыте (построить каждый дом в срок)
   p = 0,9.
   Вероятность ненаступления события А в одном опыте q = 0,1

3. Вероятности возможных значений p_i определяем по формуле Бернулли:

P(x=0) = $p_3(0) = C_3^0 p^0 q^3 = 1*0,9^0*0,1^3 = 0,001$

P(x=1) = $p_3(1) = C_3^1 p^1 q^2 = 3*0,9^1*0,1^2 = 0,027$;

P(x=2) = $p_3(2) = C_3^2 p^2 q^1 = 3*0,9^2*0,1^1 = 0,243$;

P(x=3) = $p_3(3) = C_3^3 p^3 q^0 = 1*0,9^3*0,1^0 = 0,729$.

Полученные значения помогают сформировать ряд распределения.

X	0	1	2	3
p	0,001	0,027	0,243	0,729

4. M(X) = n*p = 3*0.9 = 2.7
   D(X) = n*p*q = 3*0.9*0.1 = 0.27
   σ(X) = $\sqrt{0.27} = 0.5$

Если производится большое количество испытаний, то формулой Бернулли пользоваться неудобно. В этом случае необходимо пользоваться формулой Муавра-Лапласа.

Однако это формула непригодна, если вероятность наступления события мала, в этом случае необходимо пользоваться формулой Пуассона.

2) Распределение Пуассона

Распределение Пуассона – имеет место, когда производится большое количество испытаний, но вероятность появления события мала. Вероятность при этом рассчитывается по формуле Пуассона:

$$\boldsymbol{P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}}\text{, где } \boldsymbol{\lambda = np}.$$

Имеются специальные таблицы, пользуясь которыми можно найти $P_n(k)$, зная k и λ.

Таблица распределения Пуассона

k\λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8	1	1,5	2
0	0,904837	0,818731	0,740818	0,670320	0,606531	0,548812	0,449329	0,367879	0,22313	0,135335
1	0,090484	0,163746	0,222245	0,268128	0,303265	0,329287	0,359463	0,367879	0,334695	0,270671
2	0,004524	0,016375	0,033337	0,053626	0,075816	0,098786	0,143785	0,18394	0,251021	0,270671
3	0,000151	0,001092	0,003334	0,007150	0,012636	0,019757	0,038343	0,061313	0,125511	0,180447
4	0,000004	0,000055	0,000250	0,000715	0,001580	0,002964	0,007669	0,015328	0,047067	0,090224
5	0	0,000002	0,000015	0,000057	0,000158	0,000356	0,001227	0,003066	0,014120	0,036089
6	0	0	0,000001	0,000004	0,000013	0,000036	0,000164	0,000511	0,003530	0,012030
7	0	0	0	0	0,000001	0,000003	0,000019	0,000073	0,000756	0,003437
8	0	0	0	0	0	0	0,000002	0,000009	0,000142	0,000859
9	0	0	0	0	0	0	0	0,000001	0,000024	0,000191
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0,000004	0,000038
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,000007
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,000001
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Ряд распределения Пуассона в общем виде.

X	0	1	…	n
p	e^{-np}	npe^{-np}	…	$(np)^m e^{-np}/m!$

Числовые характеристики распределения Пуассона:

M(X) = λ

D(X) = λ

σ(X) = $\sqrt{\lambda}$

Пример 2. Завод отправил на базу 5000 доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится, равно 0,0002. Составить закон распределения числа поврежденных изделий, прибывших на базу.

Вариантов случайной величины X – числа поврежденных изделий должно быть столько, чтобы сумма их вероятностей была близка к 1.

Решение

Для решения будем использовать таблицу распределения Пуассона.

1) Определим λ = np = 5000*0,0002 = 1
2) По таблице:
$P_{5000}(0) = 0,367879$
(проверьте это значение, используя формулу Пуассона: $P_{5000}(0) = \frac{1^0}{0!} 2,718^{-1}$)
$P_{5000}(1) = 0,367879$
$P_{5000}(2) = 0,18394$
$P_{5000}(3) = 0,061313$
$P_{5000}(4) = 0,015328$

Проверим
$\sum_{i=0}^{5} p_i \cong 0,9963379 \cong 1$

X	0	1	2	3	4
p	0,367879	0,367879	0,18394	0,061313	0,015328

По закону Пуассона распределяеются, например, вызовы абонента в течении часа на телефонной станции, число дефектов вновь введенной автомобильной дороги и другие явления.

Распределение Пуассона применяется в теории массового обслуживания.

Лекция № 13. Понятие геометрического распределения, характеристики

План
1. Геометрическое распределение
2. Гипергеометрическое распределение

1) Геометрическое распределение

Геометрическое распределение – имеет место, когда производятся независимые испытания, в каждом из которых вероятность появления события А равна p. Испытания заканчиваются, как только появляется событие А.

Т.е. если событие А появилось в 5 испытании, то это значит в предшествующих четырех испытаниях оно не появлялось.

Пусть в первых k-1 испытаниях событие А не наступило, а в k-ом испытании появилось. Вероятность этого сложного события по теореме умножения вероятностей независимых событий, рассчитывается по формуле:

$$\mathbf{P(x=k) = q^{k-1}p}.$$

Ряд геометрического распределения в общем виде:

X	1	2	…	k	...
p	p	qp	…	$q^{k-1}p$	...

Распределение получило название геометрического, потому что ряд распределения представляет собой убывающую геометрическую прогрессию.

Числовые характеристики геометрического распределения:

$M(X) = \frac{1}{p}$

$D(X) = \frac{q}{p^2}$

Пример 3. Вероятность того, что стрелок попадет в мишень при одном выстреле, равна 0,8. Стрелку выдаются патроны до тех пор, пока он не попадет. Требуется составить закон распределения дискретной случайной величины X – числа патронов, выданных стрелку.

Решение

1. Возможные значения случайной величины X:
   x_1= 1 – стрелок попал с первого раза, выдан 1 патрон
   x_2 = 2 – стрелок первый раз промахнулся, второй раз попал; выдано 2 патрона
   x_3 = 3 – стрелок два раза промахнулся, третий раз попал; выдано 3 патрона
   …
   x_k=k – стрелок k-1 раз промахнулся, на k-й раз попал; выдано k патрона
   и т.д.
2. Вероятности возможных значений:
   $p(x=1) = q^0p = 0{,}2^0*0{,}8$
   $p(x=2) = q^1p = 0{,}2*0{,}8 = 0{,}16$
   $p(x=3) = q^2p = 0{,}2^2*0{,}8 = 0{,}032$ и т.д.

   $p(x=k) = q^{k-1}p = 0{,}2^{k-1}*0{,}8$

X	1	2	3	…	k	...
p	0,8	0,16	0,032	…	$0{,}2^{k-1}*0{,}8$	...

2) Гипергеометрическое распределение

Дискретная случайная величина имеет гипергеометрическое распределение, если вероятности ее значений рассчитываются по формуле:

$$\boldsymbol{P(X=m)=\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}}$$

Обозначения в этой формуле можно рассмотреть на примере задачи:

Пусть в партии из N изделий имеется M стандартных. Из партии случайно отбирают n изделий с одинаковой вероятностью, причем отобранное изделие не возвращают обратно. Найти вероятность, что среди n отобранных изделий ровно m стандартных.

Числовые характеристики гипергеометрического распределения:

M(X) = $n\frac{M}{N}$

D(X) = $n\frac{M}{N-1}(1-\frac{M}{N})(1-\frac{n}{N})$

Пример 4. В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Наудачу отобраны две детали. Составить закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных.

Дано

N = 10 – число деталей в партии;
M = 8 – число стандартных деталей;
n = 2 – число отобранных деталей;
m – число стандартных деталей среди отобранных.

Решение

1. Возможные значения случайной величины X – числа стандартных деталей среди отобранных деталей:

x_1 = 0 – среди отобранных деталей нет стандартных
x_2 = 1 – среди отобранных деталей одна стандартная
x_3 = 2 – среди отобранных деталей две стандартные

2. Вероятности возможных значений:

$P(x=0) = \frac{C_8^0 C_{10-8}^{2-0}}{C_{10}^2} = \frac{1*C_2^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{45}$ $\quad (C_{10}^2 = \frac{10!}{2!8!} = \frac{10*9*8!}{1*2*8!} = \frac{90}{2} = 45)$

$P(x=1) = \frac{C_8^1 C_{10-8}^{2-1}}{C_{10}^2} = \frac{8*C_2^1}{C_{10}^2} = \frac{8*2}{45} = \frac{16}{45}$

$P(x=2) = \frac{C_8^2 C_{10-8}^{2-2}}{C_{10}^2} = \frac{28*C_2^0}{C_{10}^2} = \frac{28*1}{45} = \frac{28}{45}$

Закон распределения:

X	0	1	2
P	1/45	16/45	28/45

Гипергеометрические распределения широко применяются в работе отделов технического контроля (ОТК) при статистической оценке качества продукции с помощью выборочного обследования, когда производится безвозвратная выборка.

Лекция № 14. Непрерывная случайная величина (НСВ). Интегральная функция распределения и ее свойства

План

1. Понятие непрерывной случайной величины через интегральную функцию распределения
2. Свойства интегральной функции распределения
3. График интегральной функции распределения

1) Понятие непрерывной случайной величины через интегральную функцию распределения

Непрерывные случайные величины могут принимать все значения из определенного интервала. Это интуитивное определение непрерывной случайной величины. В математике для точного определения используется понятие интегральной функции распределения, которую вы изучали в дискретных случайных величинах.

Интегральная функция распределения или просто функция распределения случайной величины X – это функция F(x), которая при каждом значении своего аргумента x численно равна вероятности того, что случайная величина X окажется меньше, чем значение аргумента x.

$$F(x) = P\{X<x\}$$

Случайную величину называют непрерывной, если ее функция распределения F(x) есть непрерывная функция, которая имеет кусочно-непрерывную производную.

Непрерывные случайные величины можно задать:

- через функцию распределения F(x) или интегральную функцию распределения
- через плотность вероятности f(x) или дифференциальную функцию распределения
- графически.

2) Свойства интегральной функции распределения F(X)

Свойство 1. *Значения функции распределения принадлежат отрезку* [0, 1]:

$$0 \le F(x) \le 1.$$

Свойство 2. F(x) – *неубывающая функция*, т.е.

$$F(x_2) \ge F(x_1),\ \text{если } x_2 > x_1$$

Следствие 1. *Вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в интервале (a, b), равна приращению функции распределения на этом интервале:*

$$\boxed{P(a \le X < b) = F(b) - F(a)}$$

$$P(\alpha < X < \beta) = P(\alpha \le X < \beta) = P(\alpha < X \le \beta) = P(\alpha \le X \le \beta)$$

Следствие 2. *Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно определенное значение, равна нулю.*

Свойство 3. *Если возможные значения случайной величины принадлежат интервалу (a, b), то:*

1) F(x) =0 при $x \le a$; 2) F(x) =1 при $x \ge b$.

Часто функцию распределения можно встретить в *кусочном* виде.

Пример 1. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x \le -1; \\ \frac{x}{4}+\frac{1}{4} & -1 < x \le 3; \\ 1 & x > 3. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, принадлежащее интервалу (0, 2). Построить график F(x).

Решение

Представим функция распределения в более удобном для нас виде:

F(x) = 0 при $x \le -1$

F(x) = $\frac{x}{4}+\frac{1}{4}$ при $-1 < x \le 3$

F(x) = 1 при $x > 3$

Для определения вероятности используем формулу **P(a**$\le X$ **<b)=F(b)- F(a)**

$$P(0<X<2) = F(2) - F(0).$$

На интервале (0, 2): F(x)= $\frac{x}{4}+\frac{1}{4}$

$$F(2) = \frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

$$F(0)=\frac{0}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

$$P(0<X<2)=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

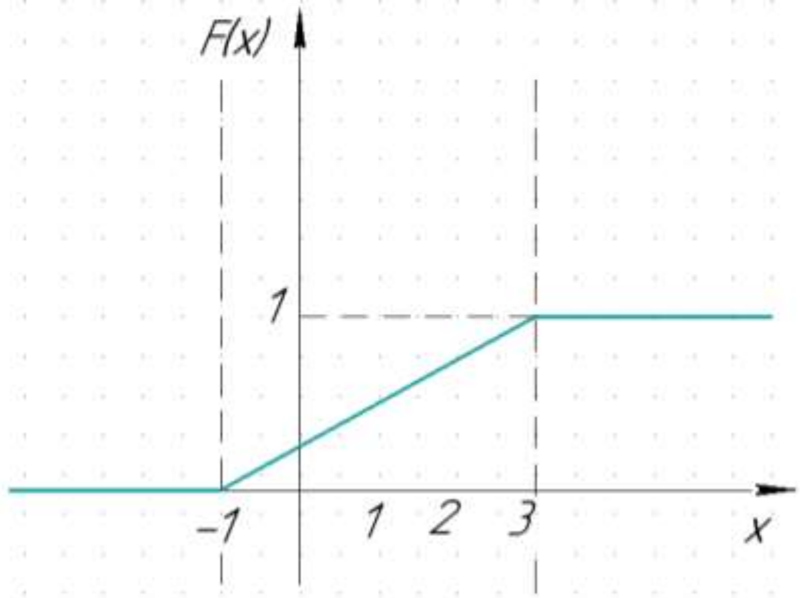
Построим график функции распределения.

F(x) = 0 при $x \le -1$

F(x) = $\frac{x}{4}+\frac{1}{4}$ при $-1 < x \le 3$

X	-1	3	0
F(x)	0	1	1/4

F(x) = 1 при $x > 3$



3) График функции распределения

Доказанные свойства позволяют представить, как выглядит график функции распределения непрерывной случайной величины.

График расположен в полосе, ограниченной прямыми *y=0, y=1* (первое свойство).

При возрастании *x* в интервале *(a, b)*, в котором заключены все возможные значения случайной величины, график «поднимается вверх» (второе свойство).

При $x \le a$ ординаты графика равны нулю; при $x \ge b$ ординаты графика равны единице (третье свойство).

Пример 2. Случайная величина *X* задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < 2, \\ (x-2)^2, & \text{если} \quad 2 \le x \le 3, \\ 1, & \text{если} \quad x > 3. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания *X* примет значение:

1) меньше 1: P(X<1)

2) заключенное в интервале (1; 2,5): P(1<X<2,5)

Построить график функции.

Решение:

1) F(1) = 0, т.е. P(X<1)=0;

2) P(1<X<2,5) = F(2,5) - F(1) = $(2{,}5 - 2)^2 - 0 = 0{,}5^2 = 0{,}25$

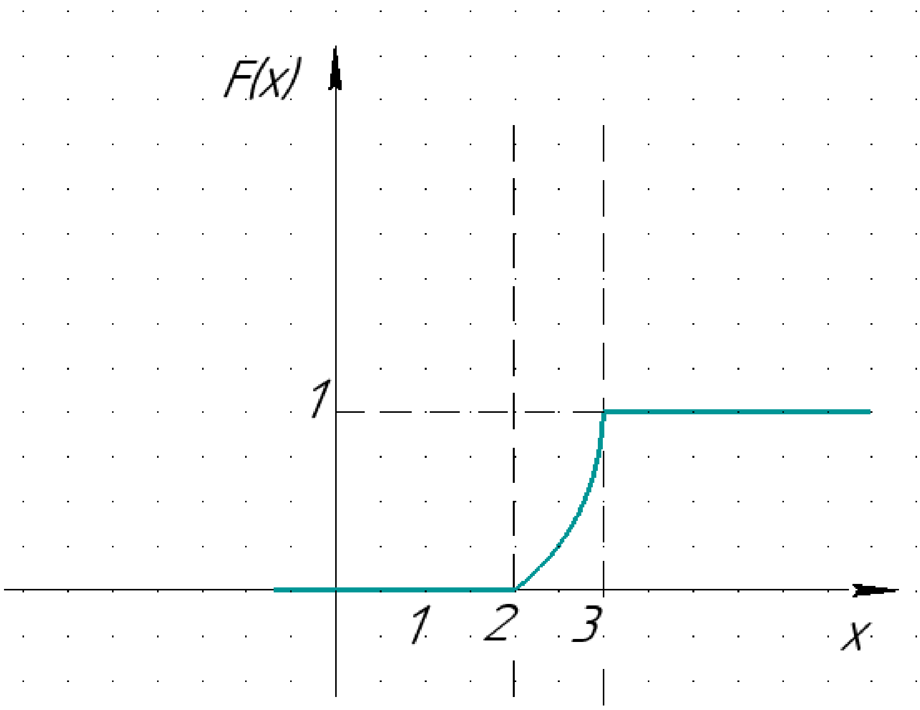
Построим график функции распределения.

F(x) = 0 при $x < 2$

F(x) = $(x - 2)^2$ при $2 < x \le 3$

F(x) = 1 при $x > 3$

X	2	3	2,5
F(x)	0	1	0,25



Пример 3. Случайная величина *X* задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{если } x \leq 0 \\ sinx, \text{если } 0 < x \leq \pi/2 \\ 1, \text{если } x > \pi/2 \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания *X* примет значение в интервале от $\alpha = \pi/6$ до $\beta = \pi/3$.

Решение

$P(\pi/6 < x < \pi/3) = F(\pi/3) - F(\pi/6) = \sin(\pi/3) – \sin(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \approx 0{,}3666$

Лекция № 15. Дифференциальная функции распределения (плотность вероятности)

План

1. Понятие плотности вероятности или дифференциальной функции распределения
2. Теорема о плотности вероятности
3. Свойства плотности вероятности
4. Взаимосвязь интегральной и дифференциальной функции распределения

1) Понятие плотности вероятности или дифференциальной функции распределения

Непрерывную случайную величину можно также задать, используя другую функцию, которую называют плотностью вероятности или плотностью распределения (также ее называют дифференциальной функцией распределения).

***Плотностью вероятности* непрерывной случайной величины *X* называют функцию *f(x)* – первую производную от функции распределения *F(x)*:**

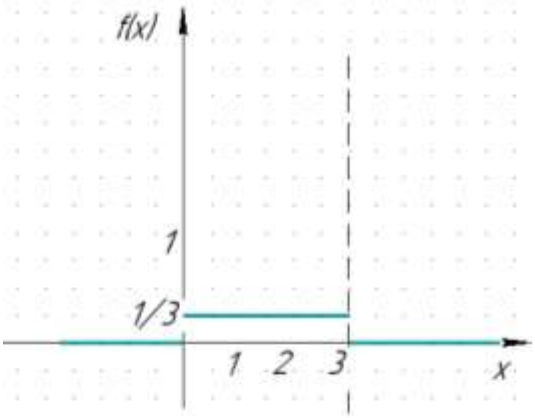
$$\boxed{f(x)=F'(x)}$$

Из этого определения следует, что функция распределения является первообразной для плотности распределения.

График плотности вероятности называют ***кривой распределения***.

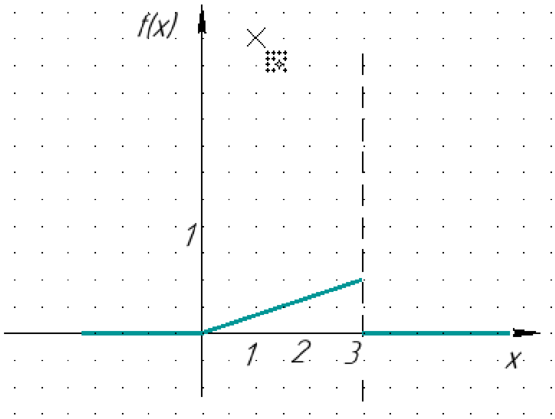
Пример 1. Случайная величина задана функцией распределения F(X). Найти плотность вероятности f(x)

А) $F(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x \le 0 \\ \frac{x}{3}, \text{ при } 0 < x \le 3 \\ 1, \text{при } x \ge 3 \end{cases}$ $\quad f(x) = \begin{cases} 0' \\ (\frac{x}{3})' \\ 1' \end{cases} = \begin{cases} 0, \text{при } x \le 0 \\ \frac{1}{3}, \text{при } 0 < x \le 3 \\ 0, \text{при } x \ge 3 \end{cases}$



Б) $F(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x \le 0 \\ \frac{x^2}{9}, \text{при } 0 < x \le 3 \\ 1, \text{при } x \ge 3 \end{cases}$ $\quad f(x) = \begin{cases} 0' \\ (\frac{x^2}{9})' \\ 1' \end{cases} = \begin{cases} 0, \text{при } x \le 0 \\ \frac{2x}{9}, \text{при } 0 < x \le 3 \\ 0, \text{при } x \ge 3 \end{cases}$

X	0	3
F(x)	0	2/3

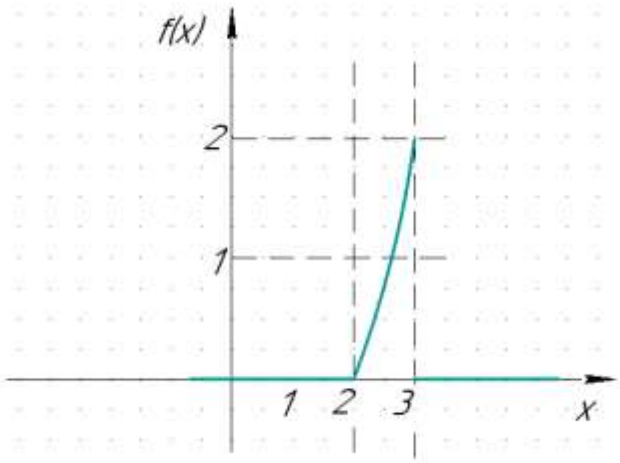


В) $F(x) = \begin{cases} 0, & \textit{если} \quad x < 2, \\ (x-2)^2, & \textit{если} \quad 2 \le x \le 3, \\ 1, & \textit{если} \quad x > 3. \end{cases}$

$$f(x) = \begin{cases} 0' \\ ((x-2)^2)' \\ 1' \end{cases} = \begin{cases} 0, \text{при } x \le 2 \\ 2(x-2), \text{при } 2 < x \le 3 \\ 0, \text{при } x \ge 3 \end{cases}$$

$((x-2)^2)' = 2(x-2) * (x-2)' = 2(x-2)$

X	2	3	2,5
F(x)	0	2	1



2) **Теорема о плотности вероятности**

Теорема. *Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу (a, b), равна определенному интегралу от плотности распределения, взятому в пределах от a до b:*

$$P\ (a<X<b)= \int_a^b f(x)dx$$

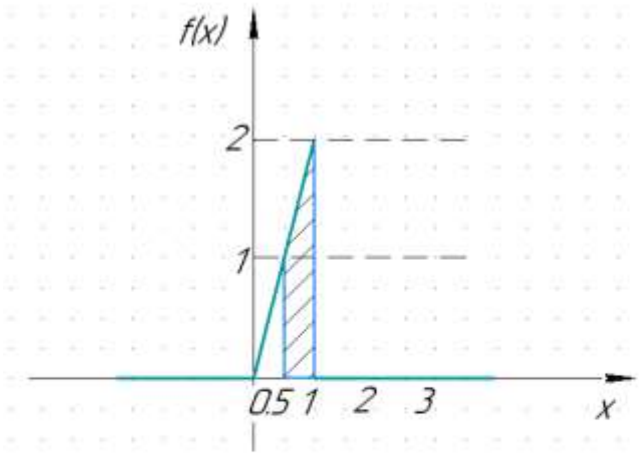
Пример 2. Задана плотность вероятности случайной величины *X*

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leq 0 \\ 2x \text{ при } 0 < x \leq 1 \\ 0 \text{ при } x > 1 \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, принадлежащее интервалу (0,5; 1).

Решение.

$$P\ (0{,}5<X<1) = \int_{0,5}^{1} 2x\,dx = 2\int_{0,5}^{1} x\,dx = 2\,\frac{x^2}{2}\,\Big|_{0.5}^{1} = x^2\Big|_{0.5}^{1} = 1^2 - 0{,}5^2 = 0.75$$



Геометрически полученный результат можно истолковать так: вероятность того, что непрерывная случайная величина примет значение, принадлежащее интервалу (a, b), равна площади криволинейной трапеции, ограниченной осью Ox, кривой распределения f(x) и прямыми x = a и x = b.

Пример 3. Задана плотность вероятности случайной величины *X*

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 2 \\ \frac{3}{8}(x-2)^2 \text{ при } 2 < x \le 4 \\ 0 \text{ при } x > 4 \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, принадлежащее интервалу (2,5; 3,5).

Решение.

P (2,5<X<3,5) = $\int_{2,5}^{3,5}(\frac{3}{8}(x-2)^2)dx = \frac{3}{8}\int_{2,5}^{3,5}(x-2)^2\,dx =$

$= \frac{3}{8}\int_{2,5}^{3,5}(x-2)^2\,d(x-2) = \frac{3}{8}\frac{(x-2)^3}{3}\ |_{2.5}^{3.5} = \frac{3}{8}(\frac{1.5^3}{3} - \frac{0.5^3}{3}) =$

$= \frac{3}{8}(1{,}125 - 0{,}0417)$ = 0.4

3) Свойства плотности вероятности

Свойство 1. *Плотность вероятности – неотрицательная функция:*

$$f(x) \ge 0.$$

Свойство 2. Несобственный *интеграл от плотности вероятности в пределах от -∞ до ∞ равен единице:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

4) Взаимосвязь интегральной и дифференциальной функции распределения

$$\boxed{f(x)=F'(x)} \qquad \boxed{F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx}$$

Пример 4. Случайная величина задана плотностью распределения. Найти: функцию распределения.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} & x \le 0 \\ (\sin x)/2 & \text{при} & 0 < x \le \pi \\ 0 & \text{при} & x > \pi \end{cases}$$

Решение

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

1. Если -∞<x≤0, то F(x) = $\int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{x} 0dx$=0.

2. Если 0<x≤ π,то

F(x) = $\int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{x}\frac{\sin x}{2}dx = 0 + (-\frac{\cos x}{2})\Big|_0^x = -\frac{\cos x}{2} - -(-\frac{1}{2}) = -\frac{\cos x}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\cos x}{2}$

3. Если $x > \pi$

F(x) = $\int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{\pi} \frac{\sin x}{2} dx + \int_{\pi}^{x} 0dx = 0 + (-\frac{\cos x}{2}) \Big|_{0}^{\pi} + + 0 = -\frac{\cos \pi}{2} - (-\frac{\cos 0}{2}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$

Ответ: $\mathrm{F}(\mathrm{x}) = \begin{cases} 0 & \text{при } \mathrm{x} \le 0 \\ (1 - \cos \mathrm{x})/2 & \text{при } 0 < \mathrm{x} \le \pi \\ 1 & \text{при } \mathrm{x} > \pi. \end{cases}$

Пример 5. Случайная величина задана плотностью распределения. Найти: функцию распределения.

$$\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \begin{cases} 0 & \text{при } \mathrm{x} \le 1 \\ \mathrm{x} - \frac{1}{2} & \text{при } 1 < \mathrm{x} \le 2 \\ 0 & \text{при } \mathrm{x} > 2 \end{cases}$$

Решение

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

1. Если $-\infty < x \le 1$, то F(x) = $\int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{x} 0dx = 0$.
2. Если $1 < x \le 2$, то

   F(x) = $\int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{1} 0dx + \int_{1}^{x} \left(\mathrm{x} - \frac{1}{2}\right) dx = 0 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}x\right) \Big|_{1}^{x} = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}x\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}$
3. Если $x > 2$

F(x) = $\int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{1}^{2} \left(\mathrm{x} - \frac{1}{2}\right) dx + \int_{2}^{x} 0dx = 0 + (\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}x) \Big|_{1}^{2} + 0 = \left(\frac{4}{2} - \frac{2}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = 1.$

Ответ: $\mathrm{F}(\mathrm{x}) = \begin{cases} 0 & \text{при } \mathrm{x} \le 1 \\ \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} & \text{при } 1 < \mathrm{x} \le 2 \\ 1 & \text{при } \mathrm{x} > 2. \end{cases}$

Пример 6. Плотность распределения непрерывной случайной величины X в интервале ($-\pi/2$, $\pi/2$) равна f(x)=a*cos(x); вне этого интервала f(x)=0. Найти постоянный параметр a.

Решение.

$\boldsymbol{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1}$

$$\int_{-\infty}^{\frac{-\pi}{2}} 0dx + \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a \cdot cosx\mathrm{dx} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} 0dx = 1$$

$$\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a \cdot cosx\mathrm{dx} = \mathrm{a} * \sin(\mathrm{x}) \Big|_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = a\,(\sin\frac{\pi}{2} - \sin(-\frac{\pi}{2})) = a(1+1) = 2a$$

Приравнем результат к единице: 2a = 1. Следовательно, $\mathrm{a} = \frac{1}{2}$

Лекция № 16. Математическое ожидание, дисперсия, среднеквадратичное отклонение НСВ

План
1. Математическое ожидание НСВ
2. Дисперсия НСВ
3. Среднее квадратическое отклонение НСВ

Числовые характеристики непрерывных случайных величин не могут быть вычислены по тем формулам, которые мы использовали для дискретных величин, поскольку непрерывные величины принимают все значения из определенного интервала.

Определим формулы для определения числовых характеристик непрерывных случайных величин.

1) Математическое ожидание НСВ

Математическое ожидание M(X) непрерывной случайной величины X определяется по формуле:

$$\mathrm{M(X)} = \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{xf(x)dx}$$

Пример 1. Случайная величина задана плотностью распределения:

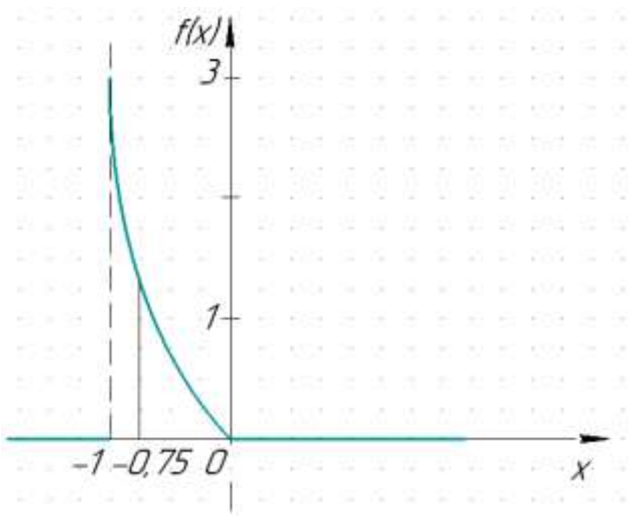
$$\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{0}, \text{при } x < -1 \\ \mathbf{3}x^{\mathbf{2}}, \text{при } -\mathbf{1} \le x < \mathbf{0} \\ \mathbf{0}, \text{при } x \ge 0 \end{cases}$$

Найти математическое ожидание этой случайной величины. Построить график f(x) и указать на нем значение полученного математического ожидания.

Решение

$$\mathrm{M(X)} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{xf(x)dx} = \int_{-\infty}^{-1} \mathrm{x} \cdot 0\mathrm{dx} + \int_{-1}^{0} \mathrm{x} \cdot 3x^2\mathrm{dx} + \int_{0}^{\infty} \mathrm{x} \cdot 0\mathrm{dx} =$$

$$= \int_{-1}^{0} \mathrm{x} \cdot 3x^2\mathrm{dx} = \int_{-1}^{0} 3x^3\mathrm{dx} = \frac{3x^4}{4}\Big|_{-1}^{0} = 0 - \frac{3 \cdot (-1)^4}{4} = -\frac{3}{4} = -0{,}75$$



X	-1	0	-0,5
f(x)	3	0	0,75

Пример 2. Случайная величина задана плотностью распределения:

$$\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{0}, \text{при } x < 1 \\ \boldsymbol{x - 1}, \text{при } \mathbf{1} \le x < \mathbf{2} \\ \boldsymbol{-x + 3}, \text{при } \mathbf{2} \le x < \mathbf{3} \\ \mathbf{0}, \text{при } x \ge 3 \end{cases}$$

Найти математическое ожидание этой случайной величины. Построить график f(x) и указать на нем значение полученного математического ожидания.

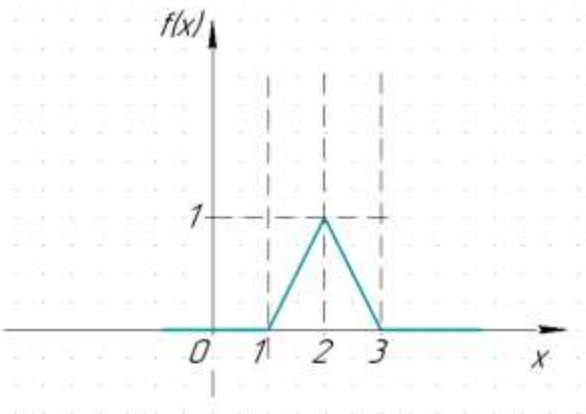
Решение

$$M(X) = \int_1^2 x \cdot (x-1)dx + \int_2^3 x \cdot (-x+3)dx = \int_1^2 (x^2 - x)dx +$$

$$+ \int_2^3 (-x^2 + 3x)dx = (\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2})|_1^2 + (-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2})|_2^3 =$$

$$= \left[\left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)\right] + [\left(-\frac{27}{3} + \frac{27}{2}\right) - \left(-\frac{8}{3} + \frac{12}{2}\right)] =$$

$$= \frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 9 + \frac{27}{2} + \frac{8}{3} - 6 = \frac{15}{3} + \frac{28}{2} - 17 = 5 + 14 - 17 = 2$$



Этот результат очевиден, если построить график функции. График функции f(x) симметричен относительно прямой x = 2 и значение случайной величины X = 2 и будет математическим ожиданием.

***2)* Дисперсия НСВ**

$$\boldsymbol{D}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{M(x)}\right)^{\mathbf{2}} \boldsymbol{f(x)dx}$$

$$\boldsymbol{D}(X) = \boldsymbol{M(x^2)} - [\boldsymbol{M(X)}]^{\mathbf{2}}\ \text{, }\boldsymbol{\textit{где}}\ M(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{x^2 f(x)dx}$$

***3)* Среднее квадратическое отклонение НСВ**

$$\boldsymbol{\sigma} = \sqrt{\boldsymbol{D(X)}}$$

Пример 3. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение для f(x), заданной в примере 1.

$$\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{0}, \text{при } x \le -1 \\ \mathbf{3}x^{\mathbf{2}}, \text{при } -\mathbf{1} < x \le \mathbf{0} \\ \mathbf{0}, \text{при } x > 0 \end{cases}$$

$$D(X) = \int_{-1}^{0} \left(x - (-\frac{3}{4})\right)^2 3x^2 dx = \int_{-1}^{0} \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 3x^2 dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} (x^2 + \frac{6}{4}x + \frac{9}{16})3x^2 dx = 3\int_{-1}^{0} (x^4 + \frac{6}{4}x^3 + \frac{9}{16}x^2) dx =$$

$$= 3\left(\frac{x^5}{5} + \frac{6}{4}\cdot\frac{x^4}{4} + \frac{9}{16}\cdot\frac{x^3}{3}\right)|_{-1}^{0} = 3\left(\frac{x^5}{5} + \frac{3x^4}{8} + \frac{3x^3}{16}\right)|_{-1}^{0} =$$

$$= 3\left(0 - (\frac{-1}{5} + \frac{3}{8} + \frac{3(-1)}{16})\right) = 3\left(\frac{1}{5} - \frac{3}{8} + \frac{3}{16}\right) =$$

$$= 3(0{,}2 - 0{,}375 + 0{,}1875) = 0{,}0375$$

$$\sigma = \sqrt{0{,}0375} = 0{,}19$$

Пример 4. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение для случайной величины, заданной функцией распределения.

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x \le 0 \\ 1 - 0{,}5\cos x, \text{при } 0 < x < \pi \\ 1, \text{при } x \ge \pi \end{cases}$$

Решение

1) Сначала найдем плотность распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x \le 0 \\ 0{,}5\sin x, \text{при } 0 < x < \pi \\ 0, \text{при } x \ge \pi \end{cases}$$

2) Математическое ожидание

$$M(X) = \int_0^{\pi} x \cdot (0{,}5 sinx) dx = 0{,}5 \int_0^{\pi} x \cdot sinx dx$$

Используем формулу интегрирования по частям:

$$\int_a^b UdV = UV|_a^b - \int_a^b VdU$$

U = x => dU = x’dx = dx

dV = sinxdx => V = ∫ sinxdx = -cosx

$$M(X) = 0{,}5[x(-\cos x)|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-cosx) dx] = (0{,}5 \cdot \pi \cdot (-cos\pi) -$$
$$-0{,}5 \cdot 0 * (-cos0)) + 0{,}5 \cdot sinx|_0^{\pi} = 0{,}5\pi + 0{,}5(sin\pi - sin0) = 0{,}5\pi$$

3) Дисперсия

Здесь необходимо применить дважды формулу интегрирования по частям

Результат:

$M(X^2) = \int_0^{\pi} x^2 \cdot (0{,}5 sinx)dx = 0{,}5(\pi^2 - 4)$

D(x) = $\frac{\pi^2}{4} - 2 \approx 0{,}4649$

4) Среднее квадратическое отклонение

$\sigma = \sqrt{0{,}4649} = 0{,}68$

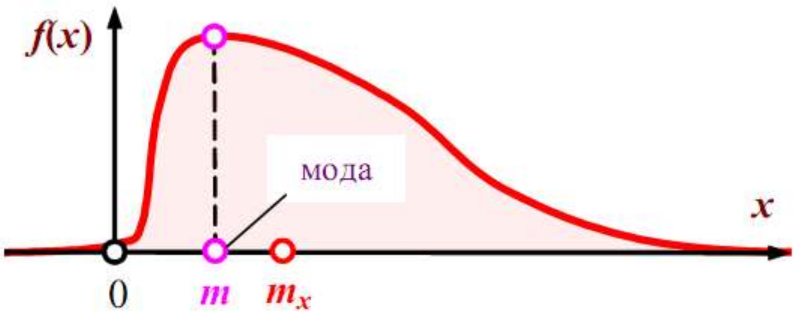
Лекция № 17. Мода и медиана НСВ

План

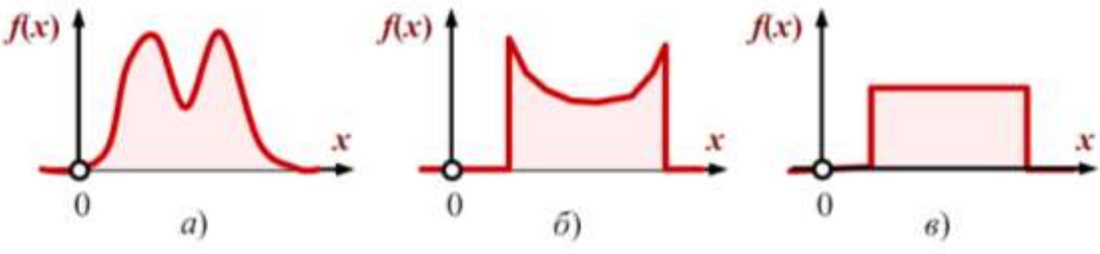
1. Мода НСВ.
2. Медиана НСВ

1) **Мода НСВ**.

Модой m называют наиболее вероятное значение случайной величины. Мода непрерывной случайной величины равна такому значению х, при котором будет **максимум у плотности распределения**.



Распределение с единственной модой называют унимодальным. Кроме унимодальных распределений случайных величин, различают полимодальные (рис. а), антимодальные (рис. б) и безмодальные (рис. в).



Если кривая распределения имеет два или несколько максимумов, то такое распределение называется полимодальным.

Если распределение имеет минимум, но не имеет максимума, то оно называется антимодальным.

Алгоритм нахождения моды НСВ:

1) Определить производную f(x)

2) Приравнять производную к 0 и найти критические точки
3) Выбрать только те критические точки, которые находятся на нужном интервале.
4) Проверить критические точки на максимум
5) Найденные точки максимума и будут модой

Пример 1. Случайная величина X задана плотностью распределения: $f(x) = -0{,}75x^2 + 4{,}5x - 6$ при $x \in [2,4]$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти моду.

Решение.

Находим производную функции f(x)

$f'(x) = -1{,}5x + 4{,}5$

Приравниваем производную к 0 и находим критические точки

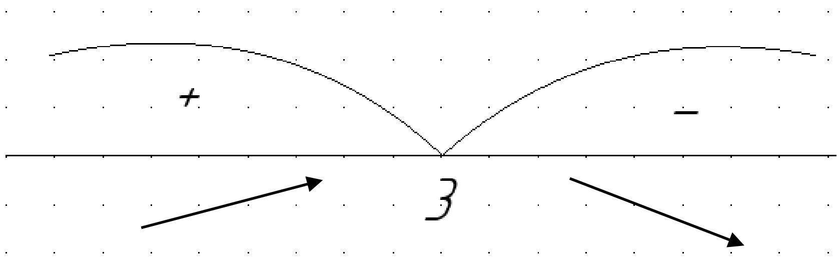
$-1{,}5x + 4{,}5 = 0$

$-1{,}5x = -4{,}5$

x = 3 – критическая точка

$x = 3 \in [2,4]$

Проверим критическую точку на максимум. Подставляем значения из интервалов в производную $f'(x) = -1{,}5x + 4{,}5$



Т.к. знак $f'(x)$ меняется с + на – при переходе через точку x = 3, то x = 3 – точка максимума

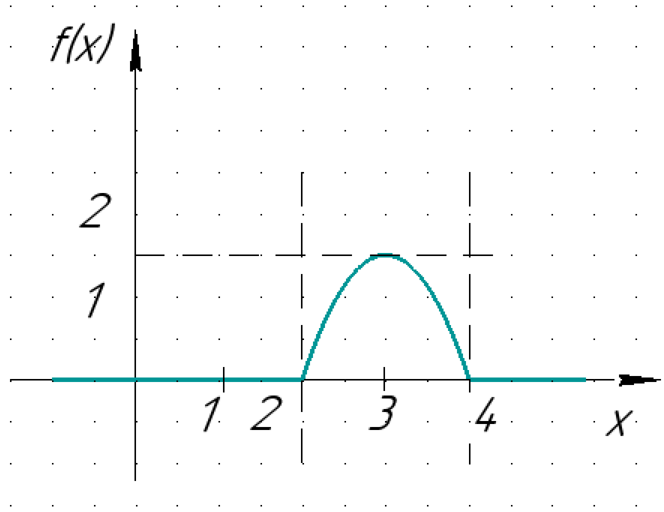
Следовательно, мода m = 3.

X	2	3	4
f(x)	0	1,5	0

Построим график данной функции.

Вершина параболы: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4.5}{2\cdot(-0.75)} = 3$

y(3) = 1,5



Пример 2. Случайная величина X задана плотностью распределения. Найти моду.

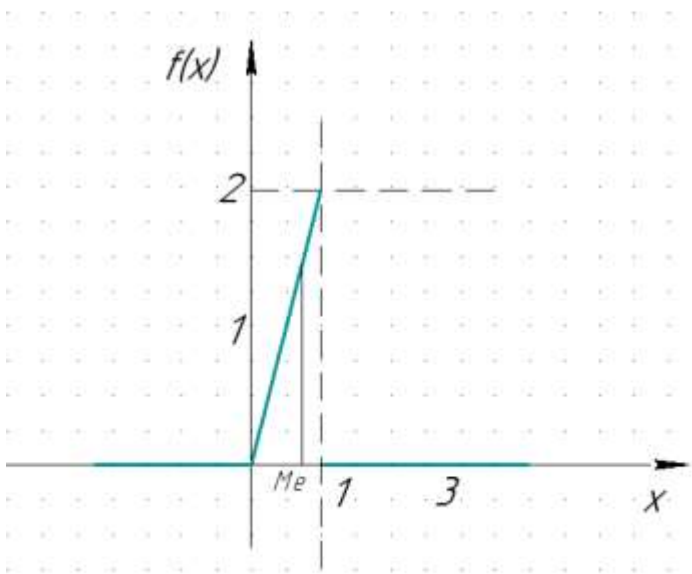
$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x < 0 \\ 2x, \text{при } 0 \le x \le 1 \\ 0, \text{при } x > 0 \end{cases}$$

Решение

$f'(x) = 2$

$2 \neq 0$ – критических точек нет.

Построим график функции f(x).



По графику видно, что максимальное значение функция f(x) принимает в точке x=1, поэтому мода m = 1

Пример 3. Случайная величина X задана плотностью распределения. Найти моду.

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x < 0 \\ 2\cos 2x, \text{при} 0 \le x \le \frac{\pi}{4} \\ 0, \text{при } x > \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Решение

$f'(x) = -4sin2x$

-4sin2x = 0

sin2x = 0

2x = πk, где k – целое число

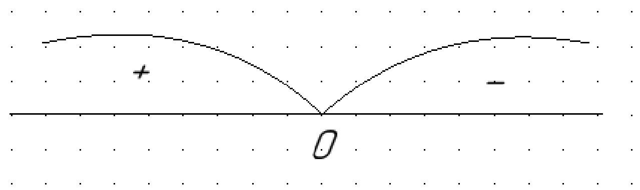
x= $\frac{\pi k}{2}$ - критические точки

Определим критические точки, которые попадают в промежуток $[0,\frac{\pi}{4}]$

При k = 0 x= 0 ∊ $[0,\frac{\pi}{4}]$

Больше таких точек нет.

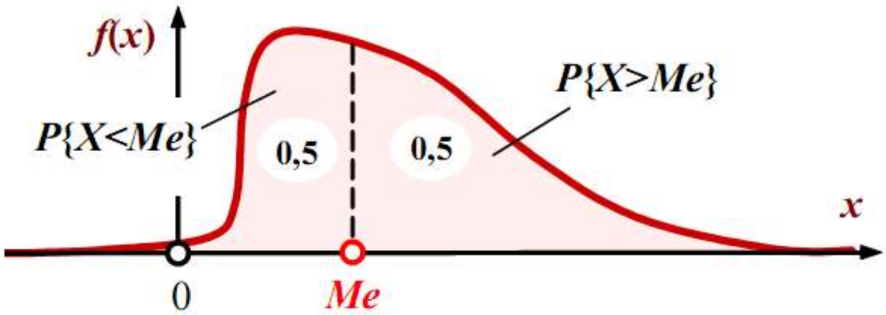
Проверим критическую точку на максимум. Подставляем значения из интервалов в производную $f'(x)$ = -4$sin2x$



Т.к знак $f'(x)$ меняется с + на – при переходе через точку x = 0, то x = 0 – точка максимума
Следовательно, мода m = 0

2) **Медиана НСВ**

Медианой Me называется такое значение случайной величины, для которого выполняется равенство P(X<Me) = P(X>Me) = 0,5.
Т.е. одинаково вероятно, окажется ли случайная величина, меньше или больше медианы.



Алгоритм нахождения медианы НСВ:

1) Найти P(X<Me)
2) Решить уравнение P(X<Me) = 0,5. Корень уравнения и будет медианой.

Пример 4. Случайная величина X задана плотностью распределения. моду НСВ.

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x < 0 \\ 2x, \text{при } 0 \le x \le 1 \\ 0, \text{при } x > 0 \end{cases}$$

Решение

Найдем P(X<Me) = P(–∞<X<Me) = $\int_{-\infty}^{Me} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx +$
$+ \int_{0}^{Me} 2xdx = = \frac{2x^2}{2}|_0^{Me} = x^2|_0^{Me} = Me^2 - 0 = Me^2$

$Me^2 = 0{,}5$
$Me = \sqrt{0{,}5} = 0{,}71$

Пример 5. Случайная величина X задана плотностью распределения. Найти медиану НСВ.

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x < 0 \\ 2\cos 2x, \text{при} 0 \le x \le \frac{\pi}{4} \\ 0, \text{при } x > \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Решение

Найдем P(X<Me) = $\int_{-\infty}^{Me} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{Me} 2\cos 2x dx = = \frac{2sin2x}{2}|_0^{Me} =$
$sin2x|_0^{Me} = \sin(2Me) - \sin 0 = \sin(2Me)$

$\sin(2Me) = 0{,}5$
$2Me = \arcsin(\frac{1}{2})$
$2Me = \frac{\pi}{6}$
$Me = \frac{\pi}{12}$

Лекция № 18. Распределения непрерывных случайных величин. Равномерно распределенная НСВ

План
1. Нормальное распределение
2. Равномерное распределение
3. Показательное распределение

1) Нормальное распределение

Нормальный закон распределения является предельным законом, к которому приближаются другие законы распределения при часто встречающихся аналогичных условиях.

Нормальным называют распределение вероятностей НСВ, которое описывается плотностью:

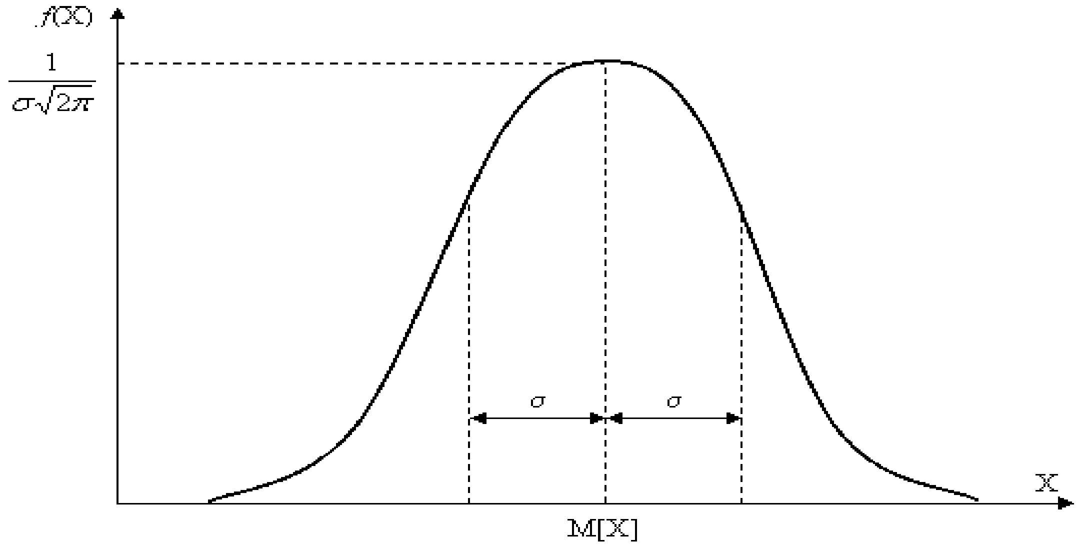
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

где μ – математическое ожидание; σ – среднеквадратичное отклонение.

Функция распределения F(x) в рассматриваемом случае принимает вид:

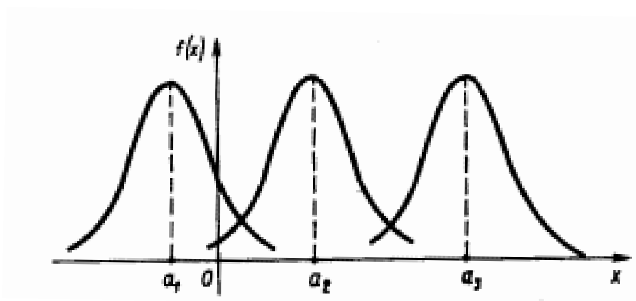
$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$

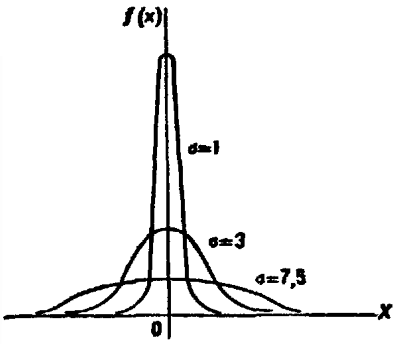
График плотности нормального распределения называют ***нормальной кривой (кривой Гаусса)***, имеющей колоколообразную форму. График функции симметричен относительно прямой x=μ. Функция достигает максимума при x=μ. При x→∞ график функции асимптотически приближается к оси Ox.



У каждого нормального распределения будет свой «колокол», свои параметры распределения — математическое ожидание и дисперсия.

Некоторые процессы кучнее группируются возле среднего значения, другие более разбросаны. Например, рост собак и рост домашних кошек имеют разный разброс значений, их кривые нормального распределения будут выглядеть по-разному. Так, кривая для роста кошек будет более узкой и высокой, а для роста собак — ниже и шире





Нормальное распределение случайных величин — один из фундаментальных законов теории вероятностей. Его действие можно встретить повсюду: в показателях роста человека и животных, в погрешности измерений, во многих физических явлениях, в давлении крови и в экзаменационных оценках. Даже в метро можно увидеть кривую Гаусса. Число людей, ожидающих поезда и желающих попасть в средние вагоны, значительно больше, чем стоящих в начале и конце платформы. Закон нормального распределения — повсюду!

Вероятность попадания в интервал нормально распределенной случайной величины

$$P(\alpha < x < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - \mu}{\sigma}\right)$$

где Φ - функция Лапласа (рассчитывается по таблице).
При этом Φ(-x) = -Φ(x)

Пример 1. Время загрузки Web-страницы распределено нормально, причем его математическое ожидание равно μ = 7 с, а стандартное отклонение σ = 2 с. Определите вероятность того, что время загрузки лежит в интервале 7 – 9 секунд.

Решение

По условию, α = 7, β = 9, μ = 7, σ = 2.

Следовательно,

P(7<X<9) = $\Phi(\frac{9-7}{2}) - \Phi(\frac{7-7}{2})$ = Φ(1) – Φ(0) = 0,3413 – 0 = 0,3413.

Пример 2. Случайная величина X распределена по нормальному закону. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение этой величины равны 30 и 10. Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (10,50).

Решение

Построим график данной случайной величины.

По условию, α = 10, β = 50, μ = 30, σ = 10.

Следовательно,

P(10<X<50) = $\Phi(\frac{50-30}{10}) - \Phi(\frac{10-30}{10})$ = Φ(2) – Φ(-2) = Φ(2) + Φ(2) = 2Φ(2).

По таблице Φ(2) = 0,4772.

Отсюда искомая вероятность P(10<X<50) = 0,9544

2) Равномерное распределение

Распределение вероятностей называют **равномерным**, если на интервале, которому принадлежат все возможные значения случайной величины, плотность вероятности постоянна. Все значения на этом интервале равновероятны.

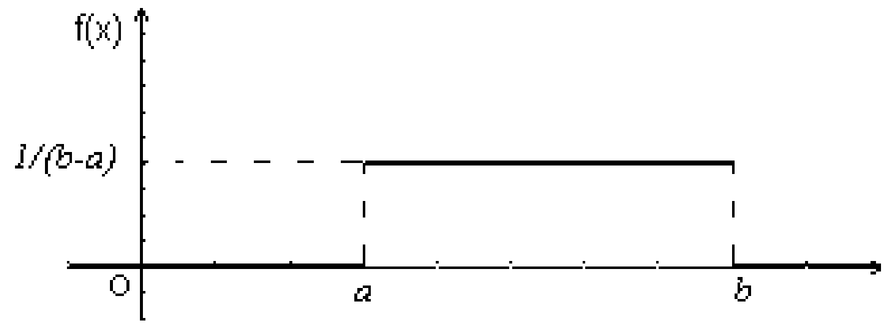
Плотность равномерного распределения f(x) определяется формулой:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x \le a \\ \dfrac{1}{b-a}, \text{при } a < x \le b \\ 0, \text{при } x > b \end{cases}$$

Интегральная функция распределения определяется формулой***:***

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, \text{при } a < x \le b \\ 1, \text{при } x > b \end{cases}$$

График плотности вероятности:



Математическое ожидание равномерно распределенной случайной величины равно
M(x)= (a+b)/2
Дисперсия равномерно распределенной случайной величины равна
D(X) = (b - a)²/12

Пример. При поломке часов остановившаяся минутная стрелка будет с одинаковой вероятностью (плотностью вероятности) показывать время, прошедшее от начала данного часа до поломки часов. Это время является случайной величиной, принимающей с одинаковой плотностью вероятности значения, которые не выходят за границы, определенные продолжительностью одного часа.

В жизни равномерным распределением часто моделируют время ожидания транспорта, ошибки округления в пределах цены деления.

Вероятность попадания в интервал равномерно распределенной случайной величины

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\alpha} < X < \beta) = \frac{\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}}$$

Где (a, b) – весь интервал, на котором равномерно распределена НСВ.

Пример 3. Известно, что передатчик может начать работу в любой момент времени между 12 и 14 часами. Какова вероятность того, что начало передачи придется ждать не более 15 минут.

Решение.
Пусть X(ч) – время начала работы передатчика. Поскольку передача может начаться в любой момент между 12 и 14 часами и все моменты равновозможны, то X – случайная величина, распределенная равномерно.

Интервал, на котором определяется вероятность, составляет от 12 часов до 12 часов 15 минут. Переведем минуты в часы: 15/60 = 0,25 часа.
Таким образом, интервал будет от 12 до 12,25 часа.

P(12<x<12,25) = $\frac{12.25-12}{14-12} = \frac{0.25}{2} = 0.125$

Пример 4. Автобусы идут строго по расписанию. Интервал движения 7 мин. Найти:
а) вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать очередной автобус менее двух минут;
б) вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать очередной автобус не менее трех минут
в) математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины X – времени ожидания пассажира.

а) По условию задачи непрерывная случайная величина X={время ожидания пассажира} равномерно распределена между приходами двух автобусов. Длина интервала распределения случайной величины X равна b - a=7, где a=0, b=7.
Время ожидания будет менее двух минут, если случайная величина X попадает в интервал (5;7).

0 5 мин 7 мин

Вероятность попадания в заданный интервал найдем по формуле:
$P(5 < X < 7) = (7-5)/(7-0) = 2/7 \approx 0{,}286$.

б) вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать очередной автобус не менее трех минут.

0 4 минут 7 минут

Время ожидания будет не менее трех минут (т.е. от трех до семи мин.), если случайная величина X попадает в интервал (0;4).
$P(0 < X < 4) = (4-0)/(7-0) = 4/7 \approx 0{,}571$.

В) **M(X)=(a+b)/2**.
$M(X) = (0+7)/2 = 7/2 = 3{,}5$ минуты.

$\boldsymbol{\sigma(X)=\sqrt{D}=\sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}}}$

$\sigma(X)=\sqrt{\frac{(7-0)^2}{12}} \approx 2{,}02$ минуты

3) Показательное распределение

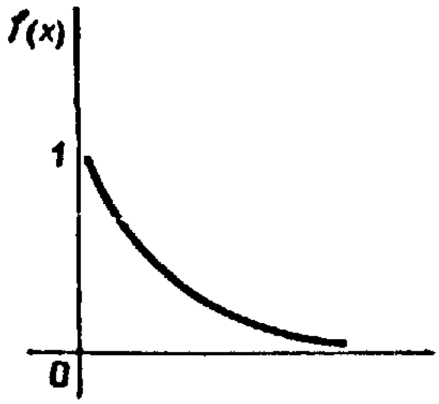
Показательным (экспоненциальным) называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, которое описывается плотностью

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} \text{ при } x \geq 0 \end{cases}$$

где λ - постоянная положительная величина

Функция распределения определяется формулой**:**

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} \text{ при } x \geq 0 \end{cases}$$



Пример. Величина срока службы различных устройств и времени безотказной работы отдельных элементов этих устройств, при выполнении определенных условий обычно подчиняется показательному распределению.

Время безотказной работы компьютерной системы есть случайная величина, имеющая показательное распределение с параметром λ, физический смысл которого – среднее число отказов в единицу времени, не считая простоев системы для ремонта.

Математическое ожидание показательно распределенной случайной величины равно ***M(X) =1/λ***

Дисперсия показательно распределенной случайной величины равна
D(X) = 1/λ²

Пример 5. По данным страховых агентств некоторой страны вероятность того, что человек доживет до 70 лет, равна 0,32. Какова вероятность того, что случайный новорожденный доживет до свадьбы? (до 22 лет). Оценить среднее время жизни в данной стране и отклонение от него.

Решение

Продолжительность жизни человека подобна длительности работы механизма – до первого отказа. Поэтому используем показательное распределение.

$F = 1 - e^{-\lambda x}$ при $x >= 0$

Найдем параметр λ.

$P(t >= 70) = 1 - P(0<t<70)$

$P(0<t<70) = F(70) - F(0) = 1 - e^{-70\lambda} - (1 - e^{0}) = 1 - e^{-70\lambda}$

$P(t >= 70) = 1 - P(0<t<70) = e^{-70\lambda} = 0{,}32$

$-70\lambda \ln e = \ln 0{,}32$

$\lambda = 0{,}0163$

$P(t >= 22) = e^{-22*0{,}0163} = 0{,}70$

$M(x) = 1/0{,}0163 = 61$ год – среднее время жизни

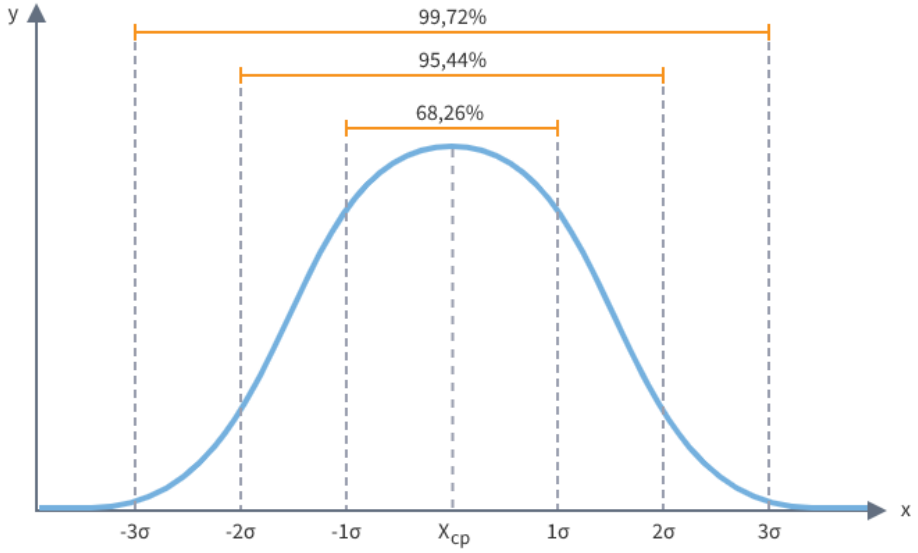
Лекция № 19. Центральная предельная теорема. Закон больших чисел

План
1. Правило трех сигм
2. Центральная предельная теорема (теорема Ляпунова)

1) Правило трех сигм

Суть правила трех сигм состоит в следующем: <u>**практически достоверным**</u> является факт, что нормально распределённая случайная величина **X** примет значение из промежутка **(m - 3σ, m + 3σ)**.

Или другими словами вероятность того, что абсолютная величина отклонения от математического ожидания превысит утроенное среднее квадратическое отклонение, очень мала, а именно равна 0,0027.



На рисунке видно, что в пределах одного среднеквадратического отклонения лежит 68,26% значений, принимаемых нормально распределенной случайной величиной (соответствует доли площади под кривой распределения). В пределах двух среднеквадратических отклонений — уже 95,44%, а в пределах трех — 99,72%. Это означает, что вероятность того, что случайная величина примет значение, отклоняющееся от математического ожидания, больше чем на три среднеквадратических отклонения, не превышает 0,28%, т.е. пренебрежимо мала.

Пример 1. Текущая цена акции может быть смоделирована по нормальному закону с математическим ожиданием 15 усл.ед. и среднеквадратическим отклонением 0,3 усл. ед. С помощью правила трех сигм установите границы, в которых будет находиться текущая цена акций.

Решение

По правилу трех сигм границы должны находиться в интервале: (m - 3σ, m + 3σ).

Подставляем значения m = 15, σ = 0,3

(15-3*0,3; 15+3*0,3) = (14,1; 15,9) – искомый интервал

Ответ: (14,1; 15,9)

Правило трех сигм может быть выведено из следующей формулы:

$$\boldsymbol{P}(|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{m}|<\boldsymbol{\delta})=\mathbf{2}\Phi\left(\frac{\boldsymbol{\delta}}{\boldsymbol{\sigma}}\right)$$

где δ - некоторое положительное число, отклонение от математического ожидания. Данную формулу можно использовать для решения задач с отклонениями от нормы.

Пример 2: Случайная величина X ошибки взвешивания распределена по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и стандартным отклонением 3 грамма. Найти вероятность того, что очередное взвешивание будет проведено с ошибкой, не превышающей по модулю 5 грамм.

Решение

По условию, m=0, σ = 3, δ = 5

Подставим в формулу:

$$P(|X-m|<\delta)=2\Phi(\frac{\delta}{\sigma})$$

$P(|X-0|<5)=2\Phi(\frac{5}{3})$

$P(|X|<5)\approx 2\Phi(1{,}6667)\approx 2*0{,}4522=0{,}9044$ = 90,44%

Ответ: вероятность того, что очередное взвешивание будет проведено с ошибкой, не превышающей 5 грамм равно 90,44%

2) Центральная предельная теорема (теорема Ляпунова)

Суть центральной предельной теоремы состоит в том, что если случайная величина X является *суммой* очень большого числа взаимно независимых случайных величин X_1, X_2, X_3, …X_n, влияние каждой из которых на всю сумму ничтожно мало, то X имеет распределение, близкое к нормальному.

В окружающем мире условие теоремы Ляпунова выполняется очень часто, и поэтому нормальное распределение (близкое к нему) и встречается буквально на каждом шагу.

Так, например, молекул воздуха очень и очень много, и каждая из них своим движением оказывает ничтожно малое влияние на всю совокупность. Поэтому скорость молекул воздуха распределена нормально.

Большая популяция некоторых особей. Каждая из них (или подавляющее большинство) оказывает несущественное влияние на жизнь всей популяции, следовательно, длина их лапок тоже распределена по нормальному закону.

ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

Основная литература:

1. Спирина М.С. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования/М.С. Спирина, П.А. Спирин. – М.: Издательский центр «Академия», 2017. - 352 с.

Дополнительная литература:

1. Спирина М.С. Теория вероятностей и математическая статистика. Сборник задач: учеб. пособие для студ. учреждений сред. проф. образования/М.С. Спирина, П.А. Спирин. – М.: Издательский центр «Академия», 2017. - 192 с.
2. Попов, А. М. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для среднего профессионального образования / А. М. Попов, В. Н. Сотников. — Москва: Издательство Юрайт, 2021. — 434 с. *(образовательная платформа Юрайт https://urait.ru/).*
3. Васильев, А. А. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник и практикум для среднего профессионального образования / А. А. Васильев. Москва: Издательство Юрайт, 2021. — 232 с. *(образовательная платформа Юрайт https://urait.ru/).*
4. Калинина, В. Н. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для среднего профессионального образования / В. Н. Калинина. — Москва: Издательство Юрайт, 2021. — 472 с. *(образовательная платформа Юрайт https://urait.ru/).*
5. Сидняев, Н. И. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для среднего профессионального образования / Н. И. Сидняев. — Москва: Издательство Юрайт, 2021. — 219 с. *(образовательная платформа Юрайт https://urait.ru/).*

Интернет-ресурсы:

1. Прикладная математика. Справочник математических формул. Примеры и задачи с решениями. [Электронный ресурс]. – Форма доступа: http://www.pm298.ru
2. Теория вероятностей в интернете [Электронный ресурс]. – Форма доступа: http://www.nauki-online.ru/teoriya-veroyatnostey
3. Теорвер-Онлайн. Интернет-учебник. [Электронный ресурс]. – Форма доступа: http://new.math.msu.su/department/probab/io/teorver-online/
4. «МатБюро». Теория вероятностей [Электронный ресурс]. – Форма доступа: https://www.matburo.ru/tv.php
5. Прилепова В.В. Теория вероятностей в ЕГЭ и ОГЭ [Электронный ресурс]. – Форма доступа: https://4ege.ru/matematika/52134-teoriya-veroyatnosti-v-ege-i-oge.html

Таблица значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013

Приложение 2

Таблица значений функции Лапласа $\Phi(\mathrm{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}\,dt$

x	Сотые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,9	0,499952									
4,0	0,499968									
4,5	0,499997									
5,0	0,49999971									

Приложение 3

Таблица распределения Пуассона

k\λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8	1	1,5	2
0	0,904837	0,818731	0,740818	0,670320	0,606531	0,548812	0,449329	0,367879	0,22313	0,135335
1	0,090484	0,163746	0,222245	0,268128	0,303265	0,329287	0,359463	0,367879	0,334695	0,270671
2	0,004524	0,016375	0,033337	0,053626	0,075816	0,098786	0,143785	0,18394	0,251021	0,270671
3	0,000151	0,001092	0,003334	0,007150	0,012636	0,019757	0,038343	0,061313	0,125511	0,180447
4	0,000004	0,000055	0,000250	0,000715	0,001580	0,002964	0,007669	0,015328	0,047067	0,090224
5	0	0,000002	0,000015	0,000057	0,000158	0,000356	0,001227	0,003066	0,014120	0,036089
6	0	0	0,000001	0,000004	0,000013	0,000036	0,000164	0,000511	0,003530	0,012030
7	0	0	0	0	0,000001	0,000003	0,000019	0,000073	0,000756	0,003437
8	0	0	0	0	0	0	0,000002	0,000009	0,000142	0,000859
9	0	0	0	0	0	0	0	0,000001	0,000024	0,000191
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0,000004	0,000038
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,000007
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,000001
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0