Распределения непрерывных случайных величин

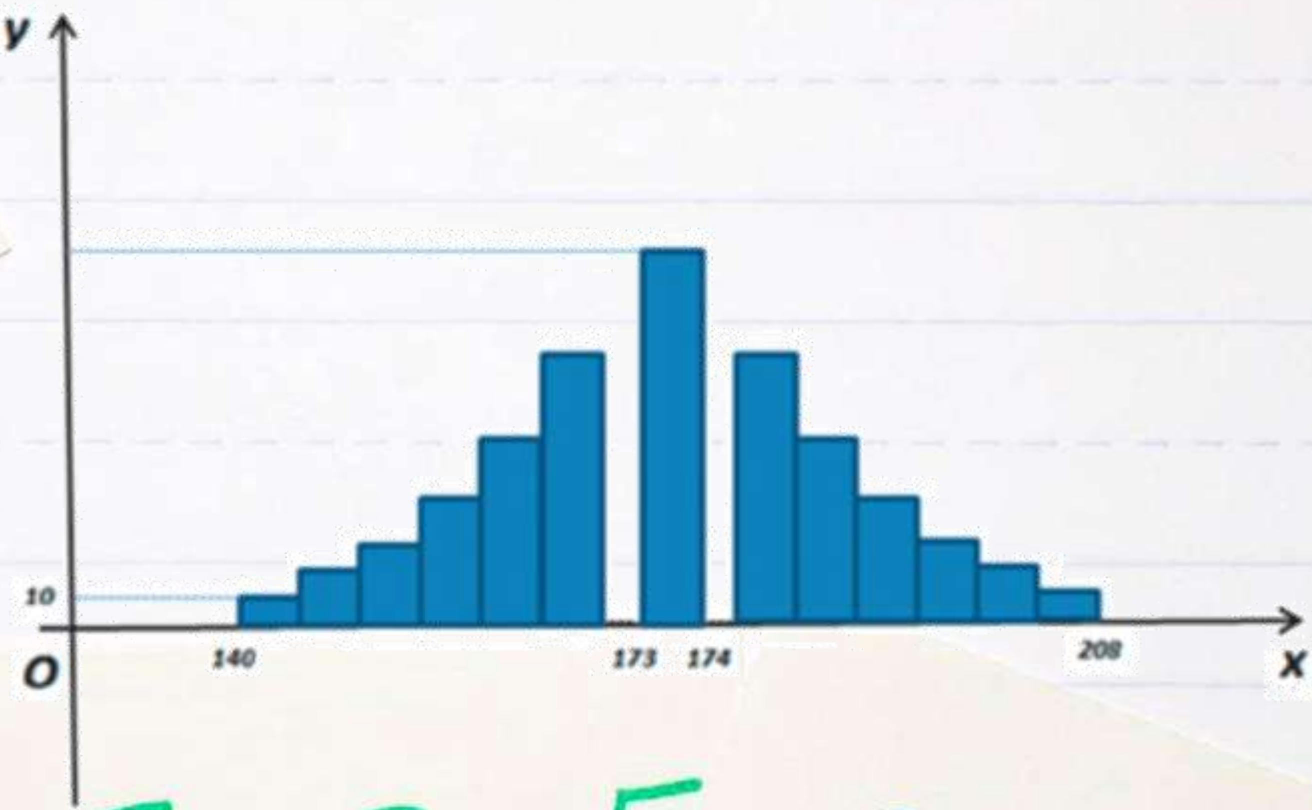
Миром правят числа!

Нумерология – магия чисел

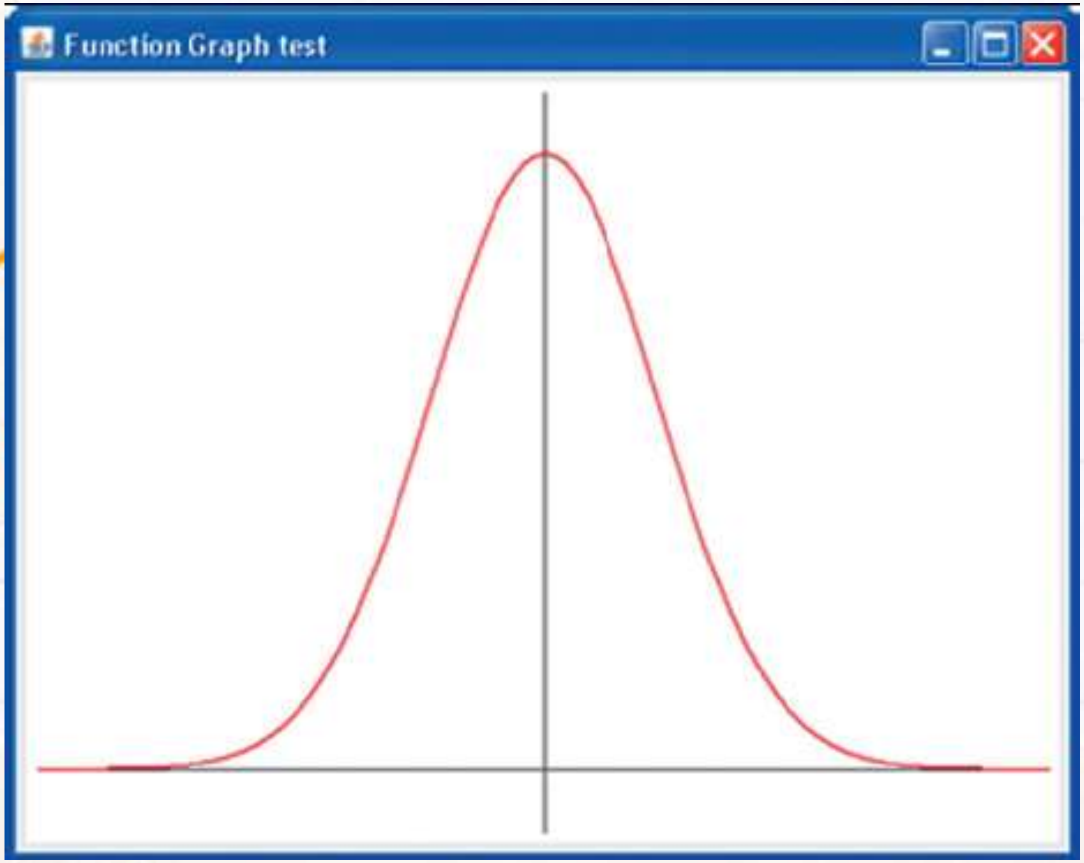
Древнегреческий философ
и математик Пифагор
(VI в. до н.э.)

ЗАДАЧА: ОПРЕДЕЛИТЬ РОСТ ЛЮДЕЙ

Интервалы роста	140–141	141–142	…	172–173	173–174	174–175	…	206–207	207–208
Частота появления	10	12	…	1010	1300	1004	…	13	11



КРИВАЯ - КОЛОКОЛ



Иоганн Карл Фридрих Гаусс

1. Нормальное распределение НСВ

Нормальным называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины, которое описывается плотностью:

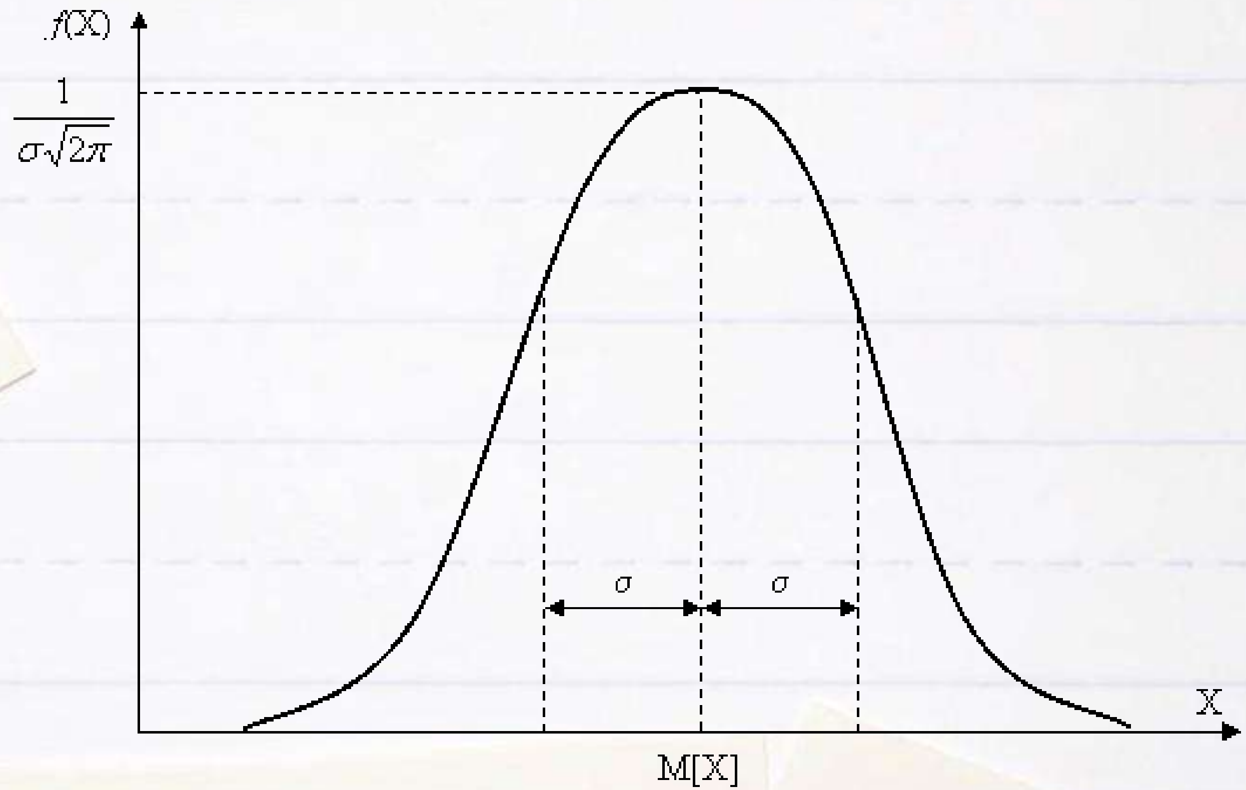
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

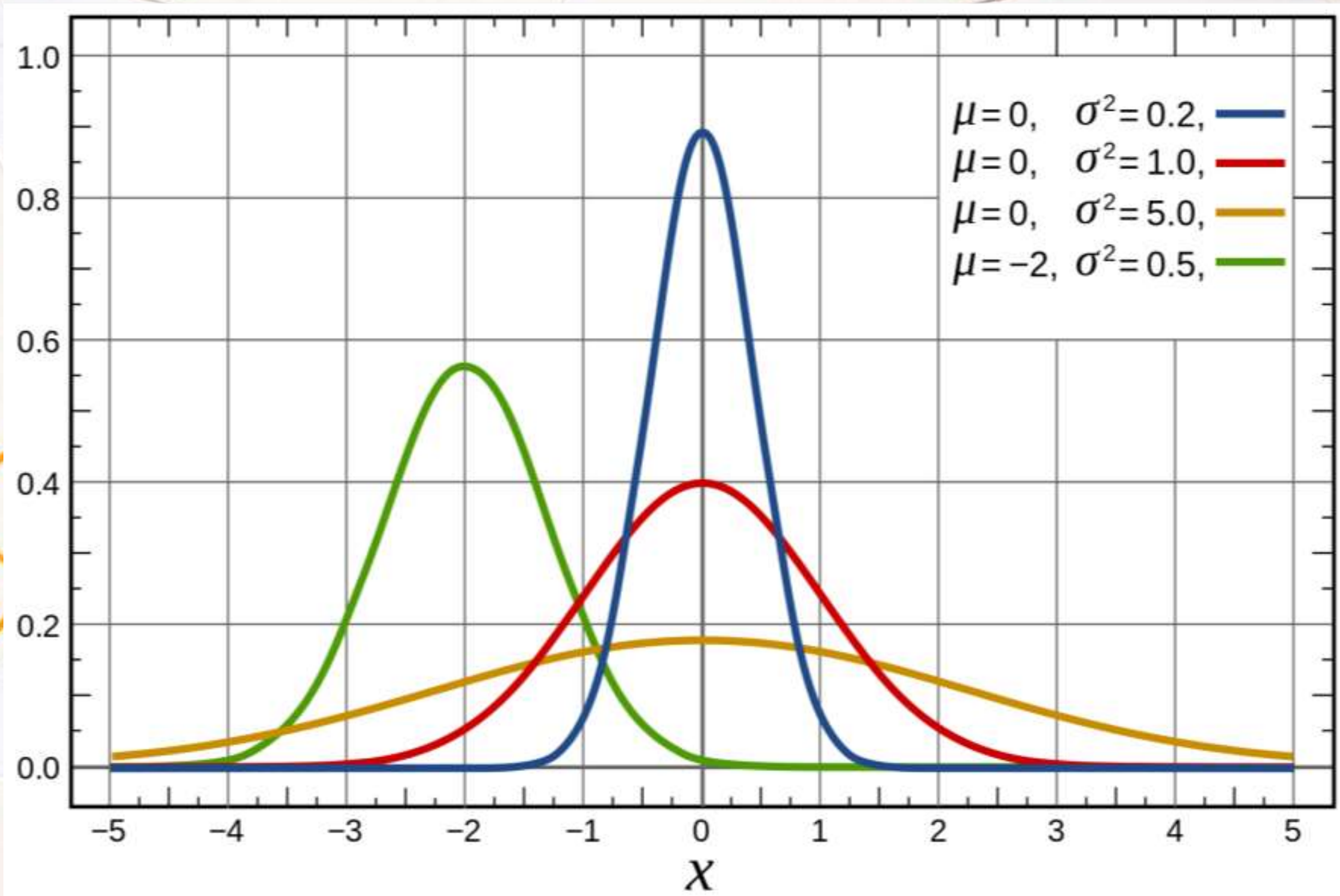
где **μ** — математическое ожидание,
σ — среднеквадратическое отклонение,
$\boldsymbol{\sigma^2}$ — дисперсия распределения.

Нормальный закон распределения является предельным законом, к которому приближаются другие законы распределения при часто встречающихся аналогичных условиях.

Кривая Гаусса

- График плотности нормального распределения называют ***нормальной кривой (кривой Гаусса)***, имеющей колоколообразную форму.

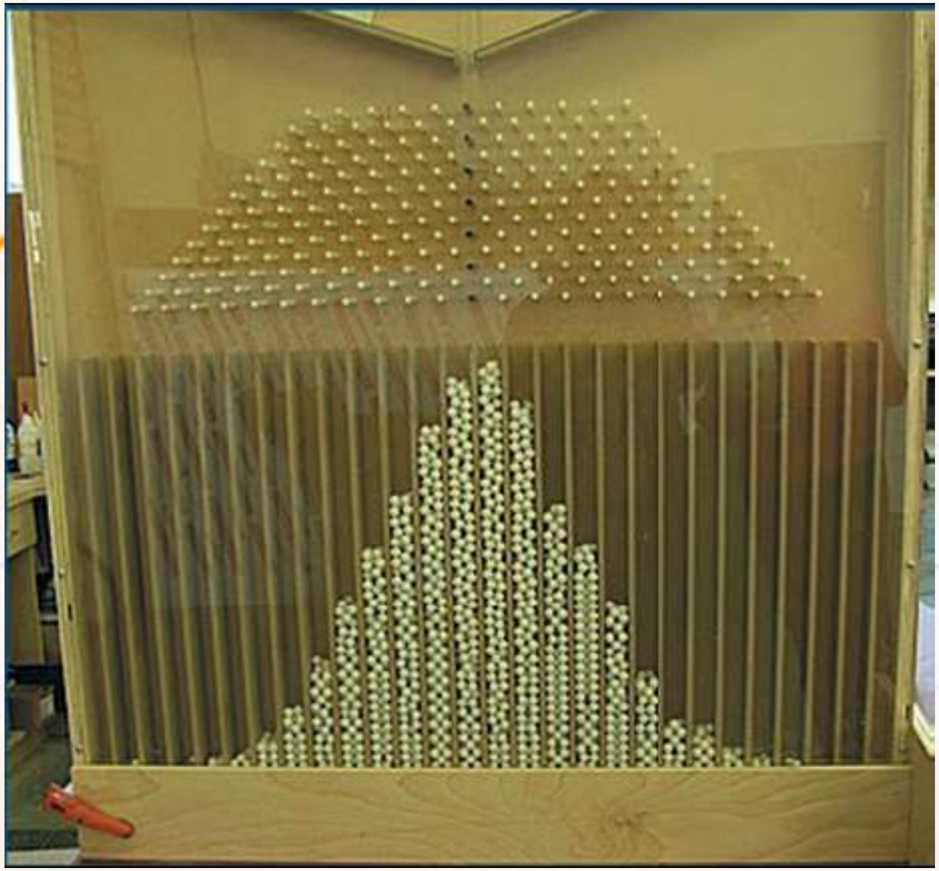




$\mu = 0, \quad \sigma^2 = 0.2,$
$\mu = 0, \quad \sigma^2 = 1.0,$
$\mu = 0, \quad \sigma^2 = 5.0,$
$\mu = -2, \sigma^2 = 0.5,$
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5
x

Физическая модель кривой Гаусса

Доска Гальтона представляет собой ящик, на задней стенке которого укреплены: вверху две наклонные планки, образующие воронку; в середине несколько рядов вбитых в стенку и расположенных в шахматном порядке гвоздей; внизу – система одинаковых вертикальных ячеек. Передняя стенка ящика стеклянная.



Брошенная в воронку горошина после ряда столкновений с гвоздями попадет в какую-то ячейку. Это – случайный процесс.
Если сыпать горох в воронку непрерывным потоком, то можно предполагать, что в центральные ячейки попадет больше горошин, чем в ячейки по бокам. На рисунке показано нормальное распределение случайных величин, которое выражает кривая Гаусса

$$P\ (a<X<b)=\int_a^b f(x)dx$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Вероятность попадания в интервал нормально распределенной случайной величины

$$P(\alpha < x < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - \mu}{\sigma}\right) - \Phi(\frac{\alpha - \mu}{\sigma})$$

где Ф - функция Лапласа (рассчитывается по таблице).
При этом Ф(-x) = -Ф(x)

Пример 1

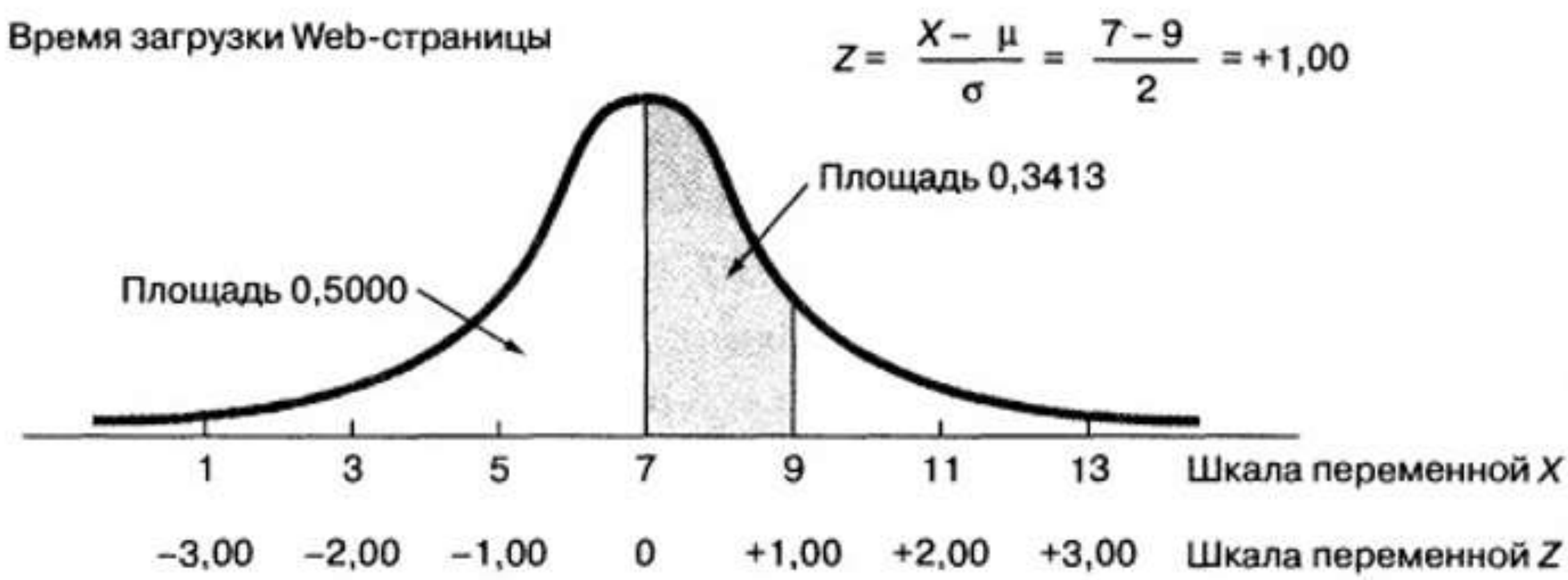
- Время загрузки Web-страницы распределено нормально, причем его математическое ожидание равно $\mu = 7$ с, а стандартное отклонение $\sigma = 2$ с. Определите вероятность того, что время загрузки лежит в интервале 7 – 9 секунд.

Решение

По условию, $\alpha = 7$, $\beta = 9$, $\mu = 7$, $\sigma = 2$.

Следовательно,

$P(7<X<9) = \Phi(\frac{9-7}{2}) - \Phi(\frac{7-7}{2}) = \Phi(1) - \Phi(0) = 0{,}3413 - 0 = 0{,}3413.$


Время загрузки Web-страницы
Z = (X – μ)/σ = (7 – 9)/2 = +1,00
Площадь 0,3413
Площадь 0,5000
1 3 5 7 9 11 13 Шкала переменной X
–3,00 –2,00 –1,00 0 +1,00 +2,00 +3,00 Шкала переменной Z

Пример 2. Случайная величина X распределена по нормальному закону. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение этой величины равны 30 и 10. Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (10, 50).

Решение

По условию, $\alpha = 10$, $\beta = 50$, $\mu = 30$, $\sigma = 10$.

Следовательно,

$P(10<X<50) = \Phi(\frac{50-30}{10}) - \Phi(\frac{10-30}{10}) = \Phi(2) - \Phi(-2) = \Phi(2) + \Phi(2) = 2\Phi(2)$

По таблице $\Phi(2) = 0{,}4772$.

Отсюда искомая вероятность $P(10<X<50) = 0{,}9544$

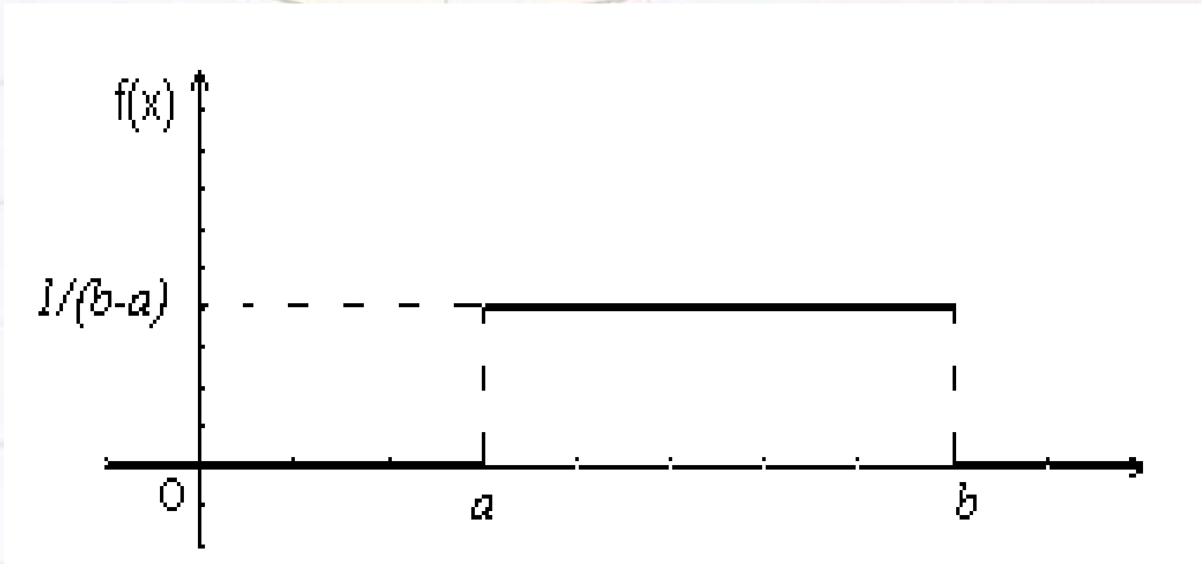
2. Равномерное распределение НСВ

Распределение вероятностей называют **равномерным**, если на интервале, которому принадлежат все возможные значения случайной величины, плотность вероятности постоянна.

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x \le a \\ \dfrac{1}{b-a}, \text{при } a < x \le b \\ 0, \text{при } x > b \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, \text{при } a < x \le b \\ 1, \text{при } x > b \end{cases}$$

График равномерного распределения



Математическое ожидание равномерной распределенной случайной величины
M(X) = (a + b)/2

Дисперсия равномерной распределенной случайной величины
D(X) = (b - a)^2/12

Вероятность попадания в интервал равномерно распределенной случайной величины

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}$$

(a,b) – весь интервал, на котором равномерно распределена НСВ.

Пример 3

- Известно, что передатчик может начать работу в любой момент времени между 12 и 14 часами. Какова вероятность того, что начало передачи придется ждать не более 15 минут.

Решение.

Пусть X(ч) – время начала работы передатчика. Поскольку передача может начаться в любой момент между 12 и 14 часами и все моменты равновозможны, то X – случайная величина, распределенная равномерно.

Интервал, на котором определяется вероятность, составляет от 12 часов до 12 часов 15 минут. Переведем минуты в часы: 15/60 = 0,25 часа.

Таким образом, интервал будет от 12 до 12,25 часа.

$$P(12<x<12{,}25) = \frac{12.25-12}{14-12} = \frac{0.25}{2} = 0.125$$

Пример 4

- Автобусы идут строго по расписанию. Интервал движения 7 мин. Найти:
- а) вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать очередной автобус менее двух минут;
- б) вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать очередной автобус не менее трех минут
- в) математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины X – времени ожидания пассажира.

По условию задачи непрерывная случайная величина X={время ожидания пассажира} равномерно распределена между приходами двух автобусов. Длина интервала распределения случайной величины X равна b - a=7, где a=0, b=7.

Время ожидания будет менее двух минут, если случайная величина X попадает в интервал (5;7).

0 5 мин 7 мин

Вероятность попадания в заданный интервал найдем по формуле:

$P(5 < X < 7) = (7-5)/(7-0) = 2/7 \approx 0{,}286.$

б) вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать очередной автобус не менее трех минут.

0 4 минут 7 минут

Время ожидания будет не менее трех минут (т.е. от трех до семи мин.), если случайная величина X попадает в интервал (0;4).

$P(0 < X < 4) = (4-0)/(7-0) = 4/7 \approx 0{,}571$.

В) **M(X)=(a+b)/2**.

M(X) = (0+7)/2 = 7/2 = 3,5 минуты.

$$\boldsymbol{\sigma(X)=\sqrt{D}=\sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}}}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{(7-0)^2}{12}} \approx 2{,}02 \text{ минуты}$$

3. Показательное распределение НСВ

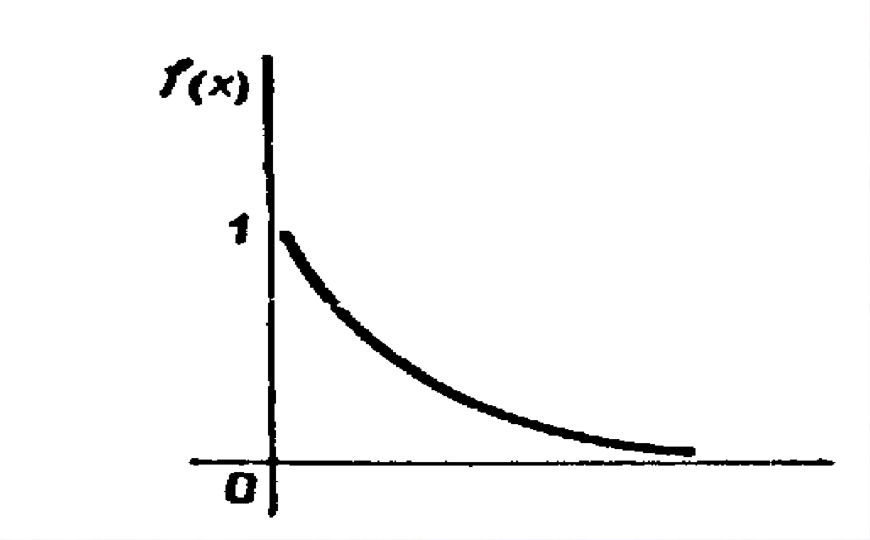
Показательным (экспоненциальным) называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, которое описывается плотностью:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} \text{ при } x \geq 0 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} \text{ при } x \geq 0 \end{cases}$$

где λ - постоянная положительная величина

График показательного распределения



Математическое ожидание показательно распределенной случайной величины
M(X) =1/λ

Дисперсия показательно распределенной случайной величины
D(X) = 1/λ²

- Время T безотказной работы компьютерной системы – это случайная величина, имеющая показательное распределение с параметром λ.
- λ - среднее число отказов в единицу времени.

Пример 4

- По данным страховых агентств некоторой страны вероятность того, что человек доживет до 70 лет, равна 0,32.
- Какова вероятность того, что случайный новорожденный доживет до свадьбы? (до 22 лет).
- Оценить среднее время жизни в данной стране и отклонение от него

$F = 1 - e^{-\lambda x}$ при $x >= 0$

Найдем параметр λ.

$P(t >= 70) = 1 - P(0<t<70)$

$P(0<t<70) = F(70) - F(0) = 1 - e^{-70\lambda} - (1 - e^{0}) = 1 - e^{-70\lambda}$

$P(t >= 70) = 1 - P(0<t<70) = e^{-70\lambda} = 0,32$

$-70\lambda \ln e = \ln 0,32$

$\lambda = 0,0163$

$P(t >= 22) = e^{-22*0,0163} = 0,70$

M(x) = 1/0,0163 = 61 год