Министерство образования, науки и молодежной политики Нижегородской области
Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение
«Арзамасский коммерческо-технический техникум»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

ЕН. 03 Теория вероятностей и математическая статистика

Специальность СПО:
09.02.07 Информационные системы и программирование

Арзамас, 2022

Рекомендованы к использованию
методическим объединением информационных дисциплин
Протокол №___
от «___»_____________20 г

Председатель МО:
_________________Н.И. Богомолова

Составлены в соответствии с требованиями к результатам освоения ППССЗ по специальности **09.02.07 Информационные системы и программирование**

и.о. зам. директора по УиНМР
__________________ Н.В. Слюдова

Н.Г. Саблукова, к.п.н., преподаватель высшей квалификационной категории ГБПОУ «Арзамасский коммерческо-технический техникум»;

Методические указания содержат задания к практическим работам, порядок их выполнения, рекомендации, перечень контрольных вопросов по каждой практической работе, требования к знаниям и умениям. Приведен список основной литературы для подготовки к практическим работам.

Методические указания предназначены для обучающихся **специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование**

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Практические работы направлены на формирование практических учебных умений вычисления вероятности событий и использования методов математической статистики. Включенные в практические работы задачи стимулируют исследовательскую и творческую деятельность, развивают познавательные интересы, помогают не только глубже понять математику, но и научиться применять полученные знания на практике.

Содержанием практических работ является решение различных задач по теории вероятностей и математической статистике.

Состав заданий для практического занятия спланирован с расчетом, чтобы за отведенное время большинство обучающихся могли их выполнить качественно.

Выполнению практических работ предшествует проверка знаний студентов – их теоретической готовности к выполнению задания.

Во время выполнения практической работы используется индивидуальная форма организации работы обучающихся. При индивидуальной форме организации занятий каждый обучающийся самостоятельно выполняет задание согласно своему варианту.

Каждая практическая работа оформляется в тетради для практических работ. В оформление работы входит запись номера практической работы, темы, цели, задания с решением, ответов на контрольные вопросы.

Выполнение практических работ по дисциплине ЕН. 03 Теория вероятностей и математическая статистика направлено на формирование общих компетенций:

ОК 1 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам.

ОК 2 Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения задач профессиональной деятельности.

ОК 4 Работать в коллективе и команде, эффективно взаимодействовать с коллегами, руководством, клиентами.

ОК 5 Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста.

ОК 9 Использовать информационные технологии в профессиональной деятельности.

ОК 10 Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках.

Практическая работа № 1

ПОДСЧЕТ ЧИСЛА КОМБИНАЦИЙ

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: научиться определять тип комбинаторного объекта и рассчитывать количество комбинаций заданного типа.

Для выполнения работы необходимо ***знать*** элементы комбинаторики; необходимо ***уметь*** применять стандартные методы и модели к решению вероятностных задач.

ВРЕМЯ ВЫПОЛНЕНИЯ: 90 минут.

КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Комбинаторика – это раздел математики, в котором изучается, сколько различных комбинаций, подчинённых тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов.

Все комбинаторные формулы можно вывести из двух основных утверждений, касающихся конечных множеств – ***правило суммы и правило произведения***. Эти два важных правила часто применяются при решении комбинаторных задач.

Основными понятиями комбинаторики являются размещения, перестановки и сочетания.

1. ***Размещением из n элементов по m*** называется любое упорядоченное подмножество, состоящее из m различных элементов данного множества.

a) *Число размещений (без повторений) из n элементов по m элементам равно* $\boldsymbol{A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}}$

Пример 1. Сколькими способами можно выбрать председателя, заместителя и профорга из 9 человек?

Решение. n = 9, m = 3.

$$A_9^3 = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9!}{6!} = \frac{9 * 8 * 7 * 6!}{6!} = 504$$

b) *Число размещений (с повторением) из n элементов по m равно* $\boldsymbol{\overline{A}_n^m = n^m}$**.**

Пример 2. Сколькими способами можно рассадить 7 человек по 9 вагонам?

Решение. Так как в один вагон могут сесть несколько человек, и рассадка зависит от того кто в каком вагоне находится, то используем формулу размещения с повторениями: $\overline{A}_9^7 = 9^7$

2. ***Перестановкой из n элементов*** называется размещение из n элементов по n элементам.

a) *Число перестановок n различных элементов (без повторений) равно* $P_n = n!$

Пример 3. В соревнованиях по фигурному катанию принимали участие россияне, итальянцы, украинцы, немцы, китайцы и французы. Сколькими способами могут распределиться места по окончании соревнований?

Решение. Используем формулу перестановки без повторения для n = 6:

$$P_6 = 6! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 = 720$$

b) *Число перестановок (с повторениями) равно* $\overline{P_k} = \frac{k!}{i_1! i_2! \dots i_n!}$

Пример 4. Сколько перестановок можно получить из букв слова КОЛОКОЛА?

Решение. Так как буквы в слове повторяются, то используем формулу перестановок с повторениями.

$i_1 = 2$ (количество букв «к»)

$i_2 = 3$ (количество букв «о»)

$i_3 = 2$ (количество букв «л»)
$i_4 = 1$ (количество букв «а»)
$k = i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = 2+3+2+1 = 8$

$$\overline{P}_8 = \frac{8!}{2!\,3!\,2!\,1!} = \frac{8*7*6*5*4*3*2*1}{2*1*3*2*1*2*1} = 8*7*5*3*2 = 1680$$

3. ***Сочетанием из n элементов по m*** называется любое подмножество, состоящее из m различных элементов данного множества

a) *Число сочетаний из n элементов по m(без повторений) равно* $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

Пример 5. Из учащихся 25 человек нужно выбрать троих дежурных. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. n = 25, m = 3.

$$C_{25}^3 = \frac{25!}{3!\,(25-3)!} = \frac{25!}{3!\,22!} = \frac{25*24*23*22!}{3*2*1*22!} = 25*4*23 = 2300$$

b) *Число сочетаний с повторениями равно* $\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m$

Пример 6. Сколькими способами можно купить 6 пирожных, если имеются 2 сорта пирожных по 5 в каждом?

Решение. Поскольку при покупке пирожных порядок их расположения не важен, то используем для подсчета формулу сочетаний с повторениями, при этом n = 5 +5 =10, m = 6.

$$\overline{C}_{10}^6 = C_{10+6-1}^6 = C_{15}^6 = \frac{15!}{6!\,(15-6)!} = \frac{15!}{6!\,9!} = \frac{15*14*13*12*11*10*9!}{6*5*4*3*2*1*9!} = 5005$$

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ И ФОРМА ОТЧЕТНОСТИ

	I вариант	**II вариант**
1.	Сколькими способами 6 человек могут стать в очередь в гардероб?	Сколькими способами 7 человек можно рассадить в ряд.
2.	Сколько различных перестановок можно образовать из всех букв слова «**Абракадабра**»?	Сколько различных перестановок можно образовать из всех букв слова «**Тарантас**»?
3.	Сколькими способами из девяти человек можно избрать комиссию, состоящую из пяти членов?	Сколькими способами можно выбрать четыре краски из имеющихся десяти различных красок?
4.	Сколько четырехбуквенных слов можно образовать из букв слова «**Костер**»?	Сколько трехбуквенных слов можно составить из букв слова «**Фонарь**»?
5.	Имеется 12 различных книг и 16 различных журналов. Сколькими способами можно составить посылку из 4 книг и 3 журналов?	На первой полке стоит 12 книг, а на второй 10. Сколькими способами можно выбрать 4 книги с первой полки и 3 со второй?
6.	Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 (цифры в числе могут повторяться)?	Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 3, 4, 5, 6, 7, 8 (цифры в числе могут повторяться)?
7.	Сколькими способами можно составить набор из 6 шоколадок, если имеются шоколадки трех сортов?	Сколькими способами можно составить коллекцию из 7 марок, если имеются марки четырех видов?
8	Имеется 8 билетов лотереи Русское лото и 10 жилищной лотереи. Сколькими способами можно выбрать по два билета либо из первой, либо из второй лотереи?	Имеется 10 билетов лотереи Русское лото и 12 жилищной лотереи. Сколькими способами можно выбрать по три билета либо из первой, либо из второй лотереи?

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Охарактеризуйте основные комбинаторные объекты.
2. Составьте схему для определения типа комбинаторного объекта.

Практическая работа № 2

ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ФОРМУЛ КОМБИНАТОРИКИ

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: научиться вычислять вероятность события по классической формуле определения вероятности с использованием формул комбинаторики.

Для выполнения работы необходимо ***знать*** понятие случайного события, классическое определение вероятности, вычисление вероятностей событий с использованием элементов комбинаторики; необходимо ***уметь*** применять стандартные методы и модели к решению вероятностных задач.

ВРЕМЯ ВЫПОЛНЕНИЯ: 90 минут

КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Согласно классическому определению вероятности ***вероятностью события А*** называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу.
Вероятность события А определяется формулой:

P(A) = m/n,

где m – число элементарных исходов, благоприятствующих A;
n – число всех возможных элементарных исходов испытания.

Пример 1. В ящике имеется 10 красных и 8 синих шаров. Наудачу вынимают один шар. Найти вероятность того, что извлеченный шар окажется синим.

Дано:	Решение
m= 8 n = 10+8 = 18	A – извлеченный шар синего цвета P(A) = m/n = 8/18 = 0,444 = 44,4%
P(A) - ?	Ответ: P(A) = 44,4%

Пример 2. Бросаются два игральных кубика. Какова вероятность, что сумма выпавших очков равна 5.

Дано:	Решение
k = 6 – количество граней кубика.	A – сумма выпавших очков на двух кубиках равна 5. P(A) = m/n Событию А благоприятствуют следующие исходы: (1,4), (4,1), (2,3), (3,2) → m= 4 Каждый из кубиков можно бросить шестью способами. Тогда два кубика по правилу умножения могут упасть 6*6 = 36 способами → n= 36 P(A) = 4/36 = 1/9 = 0,11 = 11%
P(A) - ?	Ответ: P(A) = 11%

Пример 3. В мешочке имеется 6 одинаковых кубиков. На всех гранях каждого кубика написана одна из следующих букв: о, р, ф, а, ь, н. Найти вероятность того, что на вынутых по одному и расположенных в одну линию кубиках можно будет прочесть слово «фонарь».

Дано:	Решение
о, р, ф, а, ь, н	А – из кубиков сложилось слово «фонарь». P(A) = m/n Т.к. из данных букв слово «фонарь» можно сложить только одним способом, то событию Аблагоприятствует 1 исход. → m= 1. Количество всех возможных способов выпадения букв на кубиках равно количеству перестановок. n= P_6 = 6! = 1*2*3*4*5*6 = 720 P(A) = 1/720 = 0,00139 = 0,14%
P(A) - ?	Ответ: P(A) = 0,14%

*Пример 4.*В группе 25 студентов. Из них 12 юношей и 13 девушек. Известно, что к доске должны быть вызваны двое учащихся. Какова вероятность, что это юноши?

Дано:	Решение
K = 12 L = 13 H = 25	А – к доске вызваны два юноши. P(A) = m/n Число всех исходов равно количеству способов, которыми можно выбрать двух учащихся из 25 (причем порядок вызова к доске не важен) → n = C_{25}^2=300 Число благоприятствующих исходов равно числу способов выбора двух юношей из 13 → m= $C_{13}^2 = 78$. P(A) = 78/300=13/50 = 0,26 =26%
P(A) - ?	Ответ: P(A) = 26%

Для решения задач следующего типа:

В партии из N деталей имеется *n* стандартных. Наудачу отобраны *m* деталей. Найти вероятность того, что среди отобранных деталей ровно *k* стандартных.

можно использовать формулу: $P = \frac{C_n^k C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}$

Пример 5. В партии из 10 деталей 7 стандартных. Найти вероятность того, что среди 6 взятых наудачу деталей 4 стандартных.

Дано:	Решение
N = 10 n = 7 m = 6 k = 4	А –среди отобранных 6 деталей 4 стандартных Общее число возможных элементарных исходов равно числу способов, которыми можно извлечь 6 деталей из 10, т.е. числу сочетаний из 10 элементов по 6 элементов ($\boldsymbol{C_{10}^6}$). Определим число исходов, благоприятствующих событию А. 4 стандартных детали можно взять из 7 стандартных $\boldsymbol{C_7^4}$ способами. Остальные 6 - 4=2 детали должны быть нестандартными, взять 2 нестандартных детали из 10 – 7 = 3 нестандартных деталей можно $\boldsymbol{C_3^2}$ способами. Следовательно, число благоприятных исходов равно $\boldsymbol{C_7^4 \cdot C_3^2}$. Данные рассуждения объясняют формулу: P(A) = $\frac{C_n^k C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}$ P(A) = $\frac{C_7^4 C_3^2}{C_{10}^6} = \frac{1}{2} = 50\%$
P(A) - ?	Ответ: P(A) = 50%

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ И ФОРМА ОТЧЕТНОСТИ

	I вариант	II вариант
1.	В коробке лежат 6 красных и 4 синих карандаша. Наугад вытаскиваются один из них. Найти вероятности событий того, что извлеченный карандаш красного цвета.	В коробке лежат 3 красных, 6 синих и 5 зеленых карандашей. Наугад вытаскиваются один из них. Найти вероятности событий того, что извлеченный карандаш красного цвета.
2.	Бросаются два игральных кубика. Какова вероятность, что сумма выпавших очков равна 6.	Бросаются два игральных кубика. Какова вероятность, что сумма выпавших очков равна 8.
3.	Слово ПЛОМБИР разрезается на буквы. Буквы перемешиваются и снова складываются слева направо. Найти вероятность того,что снова получится слово ПЛОМБИР.	Из буквы разрезной азбуки составлено слово ДОКУМЕНТ. Ребенок, не умеющий читать, рассыпал эти буквы, а затем собрал их в произвольном порядке. Найти вероятность того, что у него снова получится слово ДОКУМЕНТ
4.	В пачке находятся одинаковые по размеру 10 тетрадей в линейку и 6 в клетку. Из пачки наугад берут 4 тетради. Какова вероятность того, что все 4 тетради окажутся в клетку?	На полке лежат 5 учебников и 6 художественных книг. С полки наугад снимают 3 книги. Какова вероятность того, что они окажутся учебниками?
5.	На каждой из семи одинаковых карточек напечатана одна из букв: а, с, т, р, у, ж, л. Карточки тщательно перемешаны. Найти вероятность, что на четырех, вынутых по одной и расположенных «в одну линию» карточках можно будет прочесть слово «стул»	На каждой из семи одинаковых карточек напечатана одна из букв: д, а, т, о, с, ж, к. Карточки тщательно перемешаны. Найти вероятность, что на пяти, вынутых по одной и расположенных «в одну линию» карточках можно будет прочесть слово «доска»
6.	В цехе работают 6 мужчин и 4 женщины. По табельным номерам наудачу отобраны 7 человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся 3 женщины.	В группе 12 студентов, среди которых 8 отличников. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов пять отличников.
7.	В сборнике билетов по геометрии всего 25 билетов, в трех из них встречается вопрос о конусе. На экзамене школьник достается один случайно выбранный билет из этого сборника. Найти вероятность того, что в этом билете не будет вопроса о конусе.	В международных соревнованиях по фигурному катанию участвуют 25 спортсменок из разных стран, в том числе по три из США и России и по две из Японии и Швеции. Порядок выступления определяется жребием. Какова вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, будет представлять какую-то другую из оставшихся стран?

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Используя классическое определение вероятности, докажите свойства вероятности:
    a. Вероятность достоверного события равна 1.
    b. Вероятность невозможного события равна 0.
2. При каких условиях применима классическая формула определения вероятности?
3. Какая сумма числа очков наиболее вероятна при бросании двух кубиков?

Практическая работа № 3

ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СЛОЖНЫХ СОБЫТИЙ

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: научиться вычислять вероятности суммы совместных и несовместных событий, произведения независимых и зависимых событий, пользоваться формулами полной вероятности и Байеса.

Для выполнения работы необходимо ***знать*** алгебру событий, теоремы умножения и сложения вероятностей, формулу полной вероятности, формулу (теорему) Байеса; необходимо ***уметь*** применять стандартные методы и модели к решению вероятностных задач.

ВРЕМЯ ВЫПОЛНЕНИЯ: 90 минут.

КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

1. ***Суммой*** A + B двух событий A и B называют событие, состоящее в появлении события A, или события B, или обоих этих событий.
    a. **Теорема сложения вероятностей несовместных событий.** Вероятность появления одного из двух несовместных событий, равна сумме вероятностей этих событий:
    P (A + B) = P(A) + P(B)
    b. **Теорема сложения вероятностей совместных событий.** Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:
    P(A+B) = P(A) + P(B) – P(AB)
2. ***Произведением*** двух событий A и B называют событие AB, состоящее в совместном появлении этих событий.
    a. **Теорема произведения для независимых событий**. Для независимых событий вероятность совместного появления событий равна произведению вероятностостей этих событий:
    P(AB) = P(A) P(B).
    b. **Теорема умножения вероятностей.** Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:
    P(AB) = P(A) P_A(B).
3. ***Вероятность появления хотя бы одного из независимых событий.***
    Если события A_1, A_2, A_3,… A_n независимы в совокупности, причем $P(A_1) = p_1$, $P(A_2) = p_2$, $P(A_3) = p_3$ и т.д.; q_1, q_2, q_3, …, q_n – вероятности противоположных событий.
    Вероятность наступления события A, состоящего в наступлении хотя бы одного из событий A_1, A_2, A_3,… A_n равна:
    $\mathbf{P(A) = 1 – q_1q_2q_3…q_n}$.
4. ***Вероятность появления только одного из двух событий.***
    $\mathbf{P(A) = p_1q_2 + p_2q_1}$

Формула полной верятности позволяет определить вероятность события A, которое может наступить при условии появления одного из несовместных событий B_1, B_2, … B_n, образующих полную группу.

$$\mathbf{P(A) = P(B_1)\cdot P_{B1}(A) + P(B_2)\cdot P_{B2}(A) + … + P(B_n)\cdot P_{Bn}(A)}$$

Чтобы оценить вероятности гипотез B_1, B_2, … B_n, после того как стал известен результат испытания, используется **формула Байеса**.

$$\mathrm{P_A}(\boldsymbol{B_i}) = \frac{\boldsymbol{P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)}}{\boldsymbol{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A) + P(B_2)\cdot P_{B_2}(A) + \cdots + P(B_n)\cdot P_{B_n}(A)}}$$

Пример 1. В первом ящике содержится 20 деталей, из них 15 стандартных; во втором 30 деталей, из них 24 стандартных; в третьем – 10 деталей, из них 6 стандартных. Найти вероятность того, что наудачу извлеченная деталь из наудачу взятого ящика – стандартная.

Решение

1. Обозначим через А – событие«взятая наудачу деталь стандартна»

Событие B_1 – деталь извлечена из первого ящика;

Событие B_2 – деталь извлечена из второго ящика

Событие B_3 – деталь извлечена из третьего ящика

2. Определим вероятности событий B_1, B_2 и B_3.

Вероятность того, что деталь взята из первого ящика $P(B_1) = 1/3$

Вероятность того, что деталь взята из первого ящика $P(B_2) = 1/3$

Вероятность того, что деталь взята из первого ящика $P(B_3) = 1/3$

3. Определим условные вероятности.

Условная вероятность того, что из 1 ящика была извлечена стандартная деталь: $P_{B1}(A) = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$

Условная вероятность того, что из 2 ящика была извлечена стандартная деталь: $P_{B2}(A) = \frac{24}{30} = \frac{4}{5}$

Условная вероятность того, что из 3 ящика была извлечена стандартная деталь: $P_{B3}(A) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

4. По формуле полной вероятности определим вероятность события А:

$P(A) = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3} + \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{3} + \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{4}{15} + \frac{1}{5} = \frac{43}{60} = 0{,}72.$

Ответ: $P(A) = 0{,}72$

Пример 2. На заводе, изготовляющем болты, первая машина производит 25%, вторая - 35%, третья - 40% всех изделий. В их продукции брак составляет соответственно 5, 4 и 2%.Случайно выбранный из продукции болт оказался дефектным. Какова вероятность того, что он был произведен первой машиной?

Решение

1. Обозначим через А – событие «выбран болт с дефектом»

B_1 – болт произведен 1 машиной; B_2 – болт произведен 2 машиной; B_3 – болт произведен 3 машиной

2. По условию задачи имеем:

$P(B_1) = 0{,}25 \quad P(B_2) = 0{,}35 \quad P(B_3) = 0{,}4$

$P_{B1}(A) = 0{,}05$

$P_{B2}(A) = 0{,}04$

$P_{B3}(A) = 0{,}02$

3. По формуле Байеса определим вероятность гипотезы В, при условии что выбран болт с дефектом:

$$P_A(B_1) = \frac{0{,}25\cdot 0{,}05}{0{,}25\cdot 0{,}05 + 0{,}35\cdot 0{,}04 + 0{,}4\cdot 0{,}02} = \frac{0{,}0125}{0{,}0345} = 0.36 = 36\%$$

Ответ: $P_A(B_1) = 36\%$

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ И ФОРМА ОТЧЕТНОСТИ

	I вариант	II вариант
1.	Среди сотрудников фирмы 28% знают английский язык, 30% – немецкий; английский и немецкий – 8%. Найти вероятность того, что случайно выбранный сотрудник фирмы знает хотя бы один язык.	Имеется 3 ящика, содержащих по 20 деталей. В первом ящике 12, во втором 5 и в третьем 9 стандартных деталей. Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что все детали окажутся стандартными.
2.	Производится бомбометание по трем	В электрическую цепь последовательно

	складам боеприпасов, причем сбрасывается одна бомба. Вероятность попадания в первый склад 0,025; во второй – 0,03; в третий 0,019. При попадании в один из складов взрываются все три. Найти вероятность того, что склады будут взорваны.	включены три элемента, работающие независимо один от другого. Вероятности отказов первого, второго и третьего элементов соответственно равны: р, = 0,1; р, = 0,15; р, = 0,2. Найти вероятность того, что тока в цепи не будет (не работает хотя бы 1 элемент).
3.	Имеется 3 ящика, содержащих по 15 деталей. В первом ящике 5, во втором 7 и в третьем 10 стандартных деталей. Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что все детали окажутся стандартными.	Среди студентов группы 15% имеют отличные оценки по математике, 34% – по истории. При этом 12% являются отличниками по обеим дисциплинам. Найти вероятность того, что случайно выбранный студент учится на «отлично» хотя бы по одной дисциплине.
4.	Отдел технического контроля проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие стандартно, равна 0,9. Найти вероятность того, что из двух проверенных изделий только одно стандартное.	В ящике 10 деталей, из которых четыре окрашены. Сборщик наудачу взял три детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна из взятых деталей окрашена. *Решить задачу двумя способами.*
5.	На полке стоят 6 учебников по математике и 3 по информатике. С полки наудачу берется сначала один учебник. Потом второй. Найти вероятность, что первая взятая книга будет учебником по информатике, а вторая учебником по математике.	В ящике находится 8 стандартных и 6 нестандартных детали. Наудачу вынимается сначала одна деталь, а потом вторая. Найти вероятность, что первая взятая деталь стандартная, а вторая нестандартная.
6.	Устройство содержит два независимо работающих элемента. Вероятности отказа элементов соответственно равны 0,05 и 0,08. Найти вероятности отказа устройства, если для этого достаточно, чтобы отказал хотя бы один элемент.	Из партии изделий товаровед отбирает изделия высшего сорта. Вероятность того, что наудачу взятое изделие окажется высшего сорта, равна 0,8. Найти вероятность того, что из двух проверенных изделий только одно высшего сорта.
7.	На стеллаже библиотеки в случайном порядке расставлено 15 учебников, причем пять из них в переплете. Библиотекарь берет наудачу три учебника. Найти вероятность того, что хотя бы один из взятых учебников окажется в переплете (событие А). *Решить задачу двумя способами*.	Мастер обслуживают 5 станков. 20% рабочего времени он проводит у первого станка, 10% - у второго, 15% - у третьего, 25% - у четвертого, 30% - у пятого станка. Найти вероятность того, что в наудачу выбранный момент времени мастер находится у 1, или 2, или 3 станка.
8	В ящике содержится 12 деталей, изготовленных на заводе №1, 20 деталей – на заводе №2 и 18 деталей – на заводе №3. Вероятность того, что деталь, изготовленная на заводе №1, отличного качества, равна 0,9; для деталей, изготовленных на заводах №2 и №3, эти вероятности соответственно равны 0,6 и 0,9. Найти вероятность того, что извлеченная наудачу деталь окажется отличного качества.	В телевизионном ателье имеется четыре кинескопа. Вероятности того, что кинескоп выдержит гарантийный срок службы, соответственно равны 0,8; 0,85; 0,9; 0,95.Найти вероятность того, что взятый наудачу кинескоп выдержит гарантийный срок.
9	В магазин поступили телевизоры от 3 фирм. На долю 1 фирмы приходится 50% от общего числа поставок, на долю 2 фирмы –	Завод выпускает 3 типа предохранителей для магнитофона. Доля каждого из них в общем объеме составляет 30, 50 и 20%. При

	20%, а на долю 3 фирмы – 30%. Из практики известно, что бракованными оказываются 4% поставляемых 1 фирмой, 3% поставляемых 2 фирмой и 5% поставляемых 3 фирмой. Найти вероятность того, что купленный в магазине и оказавшийся бракованным телевизор, был произведён первой фирмой.	перегрузке сети предохранитель 1 типа срабатывает с вероятностью 0,8, 2 типа 0,9 и 3 типа 0,85. Выбранный наугад предохранитель сработал при перегрузке сети. Какова вероятность того, что он принадлежал к 1 типу?

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Чем отличается операция сложения вероятностей от произведения?
2. Запишите способы, которыми можно рассчитать вероятность появления хотя бы одного события?
3. Для чего используется формула Байеса?

Практическая работа № 4

ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ ПОЯВЛЕНИЯ СОБЫТИЯ ПРИ ПОВТОРЕНИИ ИСПЫТАНИЙ

***ЦЕЛЬ РАБОТЫ*:** научиться вычислять вероятности сложных событий с помощью формул Бернулли, Пуассона и Муавра-Лапласа.

Для выполнения работы необходимо ***знать*** схему и формулу Бернулли, приближенные формулы в схеме Бернулли; необходимо ***уметь*** применять стандартные методы и модели к решению вероятностных задач, пользоваться таблицами.

ВРЕМЯ ВЫПОЛНЕНИЯ: 90 минут.

КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Формула Бернулли позволяет рассчитать вероятность того, что при n испытаниях событие А осуществится ровно k раз. Формулой Бернулли удобно пользоваться, когда n и k<10.

$$P_{\mathbf{n}}(\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{n}!}{\mathbf{k}!\,(\mathbf{n}-\mathbf{k})!}\mathbf{p}^{\mathbf{k}}\mathbf{q}^{\mathbf{n}-\mathbf{k}}$$

Если n и k велики, то для нахождения вероятности появления события k раз в n испытаниях используется локальная теорема **Муавра-Лапласа** или **асимптотическая формула Лапласа.**

$$P_{\mathbf{n}}(\mathbf{k}) \approx \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{npq}}}\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}),\ \text{где } \varphi(x) \text{ определяется по таблица},\ x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$$

Если n велико, k мало и p<0,1, то для нахождения вероятности появления события k раз в n испытаниях удобно пользоваться **формулой Пуассона**.

$$P_n(k) \cong \frac{(np)^k}{k!} \cdot e^{-np}$$

*Пример 1***.** В классе 10 компьютеров. Для каждого компьютера вероятность того, что он в данный момент включен, равна 0,8. Найти вероятность, что в данный момент: а) включено 4 компьютера; б) включены все компьютеры; в) включено менее 3 компьютеров; г) включено не менее 3 компьютеров.

Решение

а) n = 10; k = 4; p = 0,8; q = 0,2

По формуле Бернулли: $P_{10}(4) = \frac{10!}{4!6!}0{,}8^4 \cdot 0{,}2^6 = 210 \cdot 0{,}4096 \cdot 0{,}000064 = 0{,}0055 = 0{,}55\%$

б) n = 10; k = 10; p = 0,8; q = 0,2

По формуле Бернулли: $P_{10}(10) = \frac{10!}{10!0!}0{,}8^{10} \cdot 0{,}2^0 = 1 \cdot 0{,}1074 \cdot 1 = 0{,}1074 = 10{,}7\%$

в) $P_{10}(k<3) = P_{10}(0) + P_{10}(1) + P_{10}(2)$

$P_{10}(0)= \frac{10!}{0!10!}0{,}8^0 \cdot 0{,}2^{10} = 0{,}0000001024 = 0{,}00001\%$

$P_{10}(1)= \frac{10!}{1!9!}0{,}8^1 \cdot 0{,}2^9 = 10 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}000000512 = 0{,}000004 = 0{,}0004\%$

$P_{10}(2)= \frac{10!}{2!8!}0{,}8^2 \cdot 0{,}2^8 = 45 \cdot 0{,}64 \cdot 0{,}00000256 = 0{,}000074 = 0{,}0074\%$

$P_{10}(<3) = 0{,}00001\% + 0{,}0004\% + 0{,}0074\% = 0{,}0078\%$

г) Т.к. события «включено менее 3 компьютеров» и «включено не менее трех компьютеров» являются противоположными, то

$P_{10}(k \geq 3) = 1 - P_{10}(<3) = 1 – 0{,}000078 = 0{,}9999 = 99{,} 99\%$

Ответ: $P_{10}(4) = 0{,}55\%$; $P_{10}(10) = 10{,}7\%$; $P_{10}(k<3) = 0{,}0078\%$; $P_{10}(k \geq 3) = 99{,}99\%$

Пример 2. Найти приближенно вероятность того, что при 400 испытаниях событие наступит ровно 104 раза, если вероятность его появления в каждом испытании равна 0,2.

Дано:

n = 400; k = 104; p = 0,2; q = 0,8

Решение

Т.к. n и k велики, то используем локальную теорему Муавра-Лапласа:

$x = \frac{104-400*0{,}2}{\sqrt{400*0{,}2*0{,}8}} = \frac{24}{8} = 3 \rightarrow$ По таблице Приложения 1 $\varphi(x) = 0{,}0044$

$$P_{400}(104) = \frac{1}{\sqrt{400 * 0{,}2 * 0{,}8}} * 0.0044 = 0.00055$$

Ответ: $P_{400}(104) = 0{,}00055$

Пример 3. Вероятность повреждения товара равна 0,02. Найти вероятность того, что из ста единиц товара испортится ровно 3.

Дано:

n= 100; k = 3; p = 0,02

Решение

$$P_{100}(3) \cong \frac{(100 \cdot 0{,}02)^3}{3!} \cdot e^{-100 \cdot 0{,}02} \approx \frac{2^3}{6}e^{-2} \approx \frac{8}{6 \cdot e^2} \approx \frac{8}{6} \cdot 0{,}13 \approx 0{,}173$$

Ответ: $P_{100}(3) = 0{,}173$

Для определения вероятности того, что частота появления события А находится в некотором интервале используется интегральная формула Лапласа.

$$\mathbf{P_n(k_1 < k \leq k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)},$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}\,dt$

$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$ $\quad x_1 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$

Эту формулу удобно использовать при npq > 10. Функция Ф(х) определяется по таблице.

Пример 4. В каждом из 300 независимых испытаний на брак появление стандартной лампочки происходит с постоянной вероятностью 0,65. Найдите вероятность того, что при таких условиях появление бракованной лампочки произойдет чаще, чем в 230 испытаниях, но реже, чем в 270 случаях.

Дано:

n= 700; q = 0.65; p = 0.35

$k_1 = 230$; $k_2 = 270$

Найти: $P_{700}(230 < k < 270)$

Решение

1) $x_1 = \frac{230-700*0.35}{\sqrt{700*0.35*0.65}} = -1.19$

   $$x_2 = \frac{270 - 700 * 0.35}{\sqrt{700 * 0.35 * 0.65}} = 1.98$$

2) По таблицы Приложения 2 определяем значения функции $\Phi(x)$

   $\Phi(-1,19) = -\Phi(1,19) = -0,383$

   $\Phi(1,98) = 0,476$

3) $P_{700}(230 < k < 270) = 0,476 - (-0,383) = 0,859$

Ответ: $P_{700}(230 < k < 270) = 0,859$

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ И ФОРМА ОТЧЕТНОСТИ

I вариант

1. Устройство, состоящее из пяти независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого из них за сутки равна 0,2. Найти вероятность того, что откажут: а) три элементы; б) не менее 4 элементов; в) менее 4 элементов.
2. По результатам ежегодной проверки Портнадзором судов, было установлено: вероятность того что суда имеют нарушения правил Морского Регистра равна 0,4. Найти вероятность того, что из 2400 судов, заходивших в порт в течение этого периода, имеют нарушения правил 960 судов.
3. Пусть вероятность изготовления нестандартной детали равна 0,004. Найти вероятность того, что среди 1000 деталей окажется 5 нестандартных.
4. В каждом из 500 независимых испытаний на всхожесть событие А – прорастание исследуемого семени – происходит с вероятностью 0,4. Найдите вероятность того, что среди 500 посаженных семян взойдет менее 235.

II вариант

1. Пусть вероятность того, что телевизор потребует ремонта в течение гарантийного срока, равна 0,2. Найти вероятность того, что в течение гарантийного срока из 6 телевизоров: а) 2 телевизора потребуют ремонта; б) не более одного потребует ремонта; б) более одного потребует ремонта.
2. Вероятность найти белый гриб среди прочих равна 0,25. Какова вероятность того, что среди 300 грибов белых будет 75?
3. С базы в магазин отправлено 4000 тщательно упакованных доброкачественных изделий. Вероятность того, что изделие повредится в пути, равна 0.0005. Найти вероятность того, что из 4000 изделий в магазин прибудут 3 испорченных изделия.
4. В каждом из 500 независимых испытаний на всхожесть событие А – прорастание исследуемого семени – происходит с вероятностью 0,6. Найдите вероятность того, что среди 500 посаженных семян взойдет от 100 до 200.

III вариант

1. Монету бросают 6 раз. Выпадение герба и решки равновероятно. Найти вероятность того, что: а) герб выпадет три раза; б) герб выпадет менее трех раз; в) герб выпадет во всех испытаниях.
2. На заводе изготавливается в среднем 75% деталей отличного качества. За час было изготовлено 400 деталей. Найти вероятность того, что среди них ровно 280 деталей отличного качества.

3. Среди шариковых авторучек в среднем при упаковке, отгрузке и доставке в магазин повреждаются 0,0002%. Найти вероятность того, что среди 5000 авторучек окажутся поврежденными не более 3 ручек.
4. В каждом из 600 независимых испытаний на всхожесть событие А – прорастание исследуемого семени – происходит с вероятностью 0,5. Найдите вероятность того, что среди 600 посаженных семян взойдет менее 324.

IV вариант

1. Производится залп из 5 орудий по некоторому объекту. Вероятность попадания в объект из каждого орудия равна 0,7. Найти вероятность попадания в объект: а) трех орудий; б) более трех орудий; в) менее трех орудий.
2. Вероятность получения с конвейера изделия первого сорта равна 0,8. Определить вероятность того, что из взятых на проверку 400 изделий 315 будут первого сорта.
3. Вероятность рождения белого тигра равна 0,02. Найти вероятность того, что среди 100 рождённых тигрят окажется 3 белых.
4. В каждом из 600 независимых испытаний на всхожесть событие А – прорастание исследуемого семени – происходит с вероятностью 0,4. Найдите вероятность того, что среди 600 посаженных семян взойдет от 200 до 300.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. При каких условиях удобнее пользоваться формулой Бернулли, при каких – формулой Лапласа, а при каких – формулой Пуассона?

Практическая работа № 5

ПОСТРОЕНИЕ ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДСВ

***ЦЕЛЬ РАБОТЫ*:** научиться строить закон распределения дискретной случайной величины табличным способом, с помощью многоугольника распределения и функции распределения.

Для выполнения работы необходимо ***знать*** понятия случайной величины, дискретной случайной величины, ее распределение; необходимо ***уметь*** применять стандартные методы и модели к решению вероятностных задач.

ВРЕМЯ ВЫПОЛНЕНИЯ: 90 минут.

КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Дискретной (прерывной) называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями. Для задания дискретной случайной величины необходимо перечислить все возможные ее значения и указать их вероятности.

Законом распределения дискретной случайной величины называет соответствие между возможными значениями и их вероятностями. Его можно задать таблично, аналитически в виде функции распределения и графически с помощью многоугольника распределения.

Пример 1. Возможные значения случайной величины таковы: $x_1 = 2$, $x_2 = 5$, $x_3 = 8$. Известны вероятности первых двух возможных значений: $p_1 = 0,4$; $p_2 = 0,15$. Найти вероятность x_3.

Решение. Так как в одном испытании случайная величина принимает одно и только возможное значения, то события x_1, x_2, x_3 образуют полную группу; следовательно сумма вероятностей этих событий равна единице: $p_1 + p_2 + p_3 = 1$

$p_3 = 1 – p_1 – p_2 = 1 – 0,4 – 0,15 = 0,45$

Пример 2. В денежной лотерее выпущено 100 билетов. Разыгрывается один выигрыш в 500 и десять выигрышей по 10 рублей. Найти закон распределения случайной величины X – стоимости возможного выигрыша для владельца одного лотерейного билета.

Решение.

1. Возможные значения выигрыша: $x_1 = 500$, $x_2 = 10$, $x_3 = 0$.
2. Вероятности возможных значений:
   $p_1 = 1/100 = 0{,}01$ (количество выигрышей в 500 рублей делится на общее количество билетов);
   $p_2 = 10/100 = 0{,}1$ (количество выигрышей в 10 рублей делится на общее количество билетов);
   $p_3 = 1 – (0{,}01 + 0{,}1) = 0{,}89$.

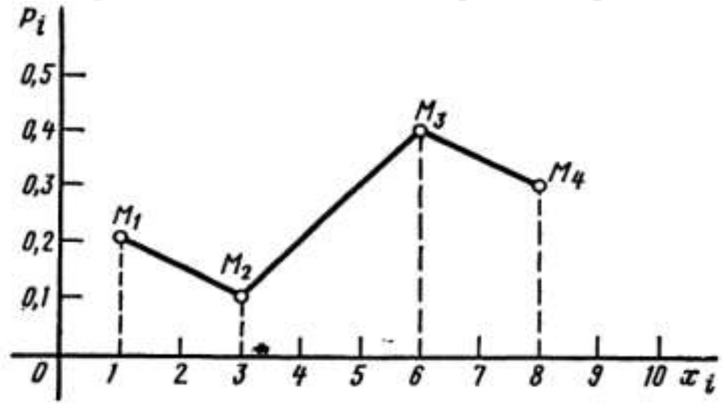
Закон распределения случайной величины X – стоимости возможного выигрыша для владельца одного лотерейного билета:

X	500	10	0
p	0,01	0,1	0,89

Пример 3. Дискретная случайная величина X задана законом распределения. Построить многоугольник распределения.

X	1	3	6	8
P	0,2	0,1	0,4	0,3

Решение. Для построения многоугольника распределения в прямоугольной системе координат построим точки (x_i, p_i), а затем соединим их отрезками прямых.



Функция распределения случайной величины X – это функция F(x), которая при каждом значении своего аргумента x численно равна вероятности того, что случайная величина X кажется меньше, чем значение аргумента x: **F(x) = P{X<x}**

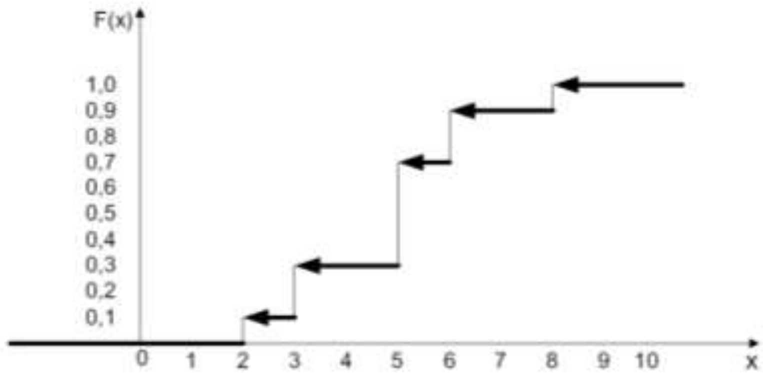
Пример 4. Дан ряд распределения дискретной случайной величины:

X	2	3	5	6	8
p	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Построить функцию распределения этой случайной величины и ее график.

Решение

1. Если значение аргумента $x\le 2$, то $F(x) = P(X<x) = 0$
2. Если значение аргумента $2<x\le 3$, то $F(x) = P(X<x) = 0{,}1$
3. Если значение аргумента $3<x\le 5$, то $F(x) = P(X<x) = 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}3$
4. Если значение аргумента $5<x\le 6$, то $F(x) = P(X<x) = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}4 = 0{,}7$
5. Если значение аргумента $6<x\le 8$, то $F(x) = P(X<x) = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}4 + 0{,}2 = 0{,}9$
6. Если значение аргумента $x>8$, то $F(x) = P(X<x) = 1$.



При нахождении закона распределения дискретной случайной величины часто необходимо использовать сложение и умножение вероятностей.

Пример 5. Два орудия стреляют по цели; вероятности попадания в цель при одном выстреле для них равны соответственно 0,7 и 0,8. Для случайной величины X (числа попаданий в мишень при одном залпе) составить ряд распределения.

Решение.

1. Возможные значения случайной величины: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$.

2. Вероятности возможных значений:

a. $x_1=0$, если оба орудия не попали в цель $\rightarrow$ $P(x_1=0) = (1-0,7)(1-0,8)= 0,06$.

b. $x_2=1$, если в цель попало ровно 1 орудие $\rightarrow$
$P(x_2=1) = 0,7\cdot(1 - 0,8) + (1 – 0,7)\cdot0,8 = 0,14 + 0,24 = 0,38$

c. $x_2=2$, если оба орудия попали в цель $\rightarrow$ $P(X=2)= 0,7\cdot0,8 = 0,56$.

Составляем ряд распределения.

X	0	1	2
p	0,06	0,38	0,56

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ И ФОРМА ОТЧЕТНОСТИ

<table>
<tr><th></th><th>I вариант</th><th>II вариант</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>Возможные значения случайной величины таковы: $x_1 = 6$, $x_2 = 7$, $x_3 = 8$. Известны вероятности первых двух возможных значений: $p_2 = 0,6$; $p_3 = 0,25$. Найти вероятность x_1.</td><td>Возможные значения случайной величины таковы: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. Известны вероятности первых двух возможных значений: $p_1 = 0,45$; $p_3 = 0,3$. Найти вероятность x_2.</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>Дискретная случайная величина X задана законом распределения. Построить многоугольник распределения.
<table><tr><td>X</td><td>2</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>P</td><td>0,3</td><td>0,1</td><td>0,2</td><td>0,4</td></tr></table></td><td>Дискретная случайная величина X задана законом распределения. Построить многоугольник распределения.
<table><tr><td>X</td><td>10</td><td>15</td><td>20</td><td>25</td></tr><tr><td>P</td><td>0,1</td><td>0,5</td><td>0,3</td><td>0,1</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>3.</td><td>В лотерее среди 100 билетов 5 с выигрышем 1000 руб., 15 – 100 руб., 25 – 10 руб., остальные по 0. Найти закон распределения случайной величины X – стоимости возможного выигрыша для владельца одного лотерейного билета.</td><td>В лотерее разыгрывается 1000 билетов. Среди них два выигрыша по 50 руб., пять по 20 руб., десять по 10 руб., 25 по 5 руб. Найти закон распределения случайной величины X – стоимости возможного выигрыша для владельца одного лотерейного билета.</td></tr>
<tr><td>4.</td><td>Два стрелка произвели по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания в нее первым стрелком равна 0,5; вторым - 0,4. Составить закон распределения числа попаданий в мишень.</td><td>Два стрелка произвели по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания в нее первым стрелком равна 0,7; вторым - 0,6. Составить закон распределения числа попаданий в мишень.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>5.</td><td>Дан ряд распределения дискретной случайной величины:<table><tr><td>X</td><td>1</td><td>3</td><td>5</td><td>7</td><td>9</td></tr><tr><td>p</td><td>0,1</td><td>0,3</td><td>0,3</td><td>0,2</td><td>0,1</td></tr></table>Построить функцию распределения этой случайной величины и ее график.</td><td>Дан ряд распределения дискретной случайной величины:<table><tr><td>X</td><td>2</td><td>4</td><td>6</td><td>8</td><td>10</td></tr><tr><td>p</td><td>0,1</td><td>0,1</td><td>0,4</td><td>0,3</td><td>0,1</td></tr></table>Построить функцию распределения этой случайной величины и ее график.</td></tr>
<tr><td>6.</td><td>Телефонистка трижды вызывает абонента. Вероятность того, что будет принят первый вызов, равна 0,2, второй вызов – 0,3 и третий вызов – 0,4. Составить закон распределения вероятностей числа X вызовов, принятых абонентом.</td><td>Составить закон распределения вероятностей числа X исправных приборов, если их три, а вероятности того, что исправны, соответственно равны 0,9, 0,8, 0,7.</td></tr>
</table>

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

4. Чем дискретные случайные величины отличаются от непрерывных?
5. Перечислите способы задания дискретной случайной величины.

Практическая работа № 6

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОСНОВНЫХ ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ДСВ

***ЦЕЛЬ РАБОТЫ*:** научиться определять математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение дискретной случайной величины по заданному распределению;

Для выполнения работы необходимо ***знать*** понятия случайной величины, дискретной случайной величины, ее распределение и характеристики; необходимо ***уметь*** применять стандартные методы и модели к решению вероятностных задач.

ВРЕМЯ ВЫПОЛНЕНИЯ: 90 минут.

КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

1. **Математическое ожидание случайной величины X** определяется по формуле:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$$

Пример 1. Найти математическое ожидание случайной величины X, зная ее закон распределения.

X	3	5	2
p	0,1	0,6	0,3

Решение

M(X) = 3*0,1 + 5*0,6 + 2*0,3 = 3,9

Пример 2. Независимые случайные величины X и Y заданы следующими законами распределения:

X	5	2	4
P	0,6	0,1	0,3

Y	7	9
P	0.8	0.2

Найти математическое ожидание случайной величины XY.

Решение.

M(X) = 5*0,6 + 2*0,1 + 4*0,3 = 4,4

M(Y) = 7*0,8 + 9*0,2 = 7,4

M(XY) = 4,4*7,4=32,56

Пример 3. Производится 3 выстрела с вероятностями попадания в цель, равными p_1= 0,4; p_2= 0,3; p_3 = 0,6. Найти математического ожидание общего числа попаданий.
Решение. Число попаданий при первом выстреле есть случайная величина X_1, которая может принимать только два значения: 1 – попадание с вероятностью 0,4 и 0 – промах с вероятностью 0,6.

$M(X_1) = 0,4$

Аналогично $M(X_2) = 0,3$; $M(X_3) = 0,6$.

Общее число попаданий есть случайная величина, состоящая из суммы попаданий в каждом из выстрелов: $X=X_1+X_2+X_3$.

$M(X) = M(X_1+X_2+X_3) = M(X_1) + M(X_2) + M(X_3) = 1,3$ попаданий.

Пример 4. Вероятность попадания в цель при стрельбе из орудия p=0,6. Найти математическое ожидание общего числа попаданий, если будет произведено 10 выстрелов.
Решение. Попадание при каждом выстреле не зависит от исходов других выстрелов, поэтому рассматриваемые события независимы и, следовательно, искомое математическое ожидание M(X) = np = 10*0.6 = 6 попаданий.

2. **Дисперсия случайной величины** определяется по формуле:
$\boldsymbol{D(X) = M(x - M(X))^2}$ или $\boldsymbol{D(X) = M(X^2) - (M(X))^2}$

Пример 5. Найти дисперсию случайной величины X, которая задана следующим законом распределения:

X	2	3	5
p	0,1	0,6	0,3

Решение. Найдем математическое ожидание M(X): M (X)=2*0,1+3*0,6+5*0,3+3,5
Математическое ожидание $M(X^2)$=4*0,1+9*0,6+25*0,3=13,3
Искомая дисперсия: $D(X)=M(X^2) - [M(X)]^2=13,3-(3,5)^2=1,05$

3. **Среднее квадратичное отклонение случайной величины** определяется по формуле: $\boldsymbol{\delta(X) = \sqrt{D(X)}}$

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ И ФОРМА ОТЧЕТНОСТИ

Задание №1. Найдите математическое ожидание M(X), дисперсию D(X) и среднее квадратичное отклонение δ (X).
Для вычисления дисперсии используйте два способа.

Вариант 1.

X	-1	-2	-3	-10	-12	-20	-30	-40
P	0,1	0,1	0,1	0,09	0,3	0,009	0,3	0,001

Вариант 2.

X	-1	-2	-3	-10	-12	-20	-30	-40
P	0,2	0,3	0,2	0,06	0,1	0,006	0,1	0,034

Вариант 3.

X	-1	-2	-3	-10	-12	-20	-30	-40
P	0,1	0,3	0,1	0,005	0,1	0,005	0,3	0,09

Вариант 4.

X	-1	-2	-3	-10	-12	-20	-30	-40
P	0,2	0,4	0,1	0,002	0,1	0,09	0,1	0,008

Вариант 5.

X	-1	-2	-3	-10	-12	-20	-30	-40
P	0,1	0,2	0,1	0,008	0,2	0,09	0,3	0,002

Вариант 6.

X	-1	-2	-3	-10	-12	-20	-30	-40
P	0,3	0,2	0,1	0,003	0,2	0,095	0,1	0,002

Задание №2. Дискретные независимые случайные величины заданы законами распределения. Найти математическое ожидание произведения M (XY) и M (2Y).

Вариант 1.:

X	1	2
p	0,2	0,8

Y	0,5	1
p	0,3	0,7

Вариант 2.

X	2	1
p	0,6	0,4

Y	1	1,25
p	0,8	0,2

Вариант 3.

X	3	2
p	0,7	0,3

Y	0,65	2
p	0,5	0,5

Вариант 4.

X	1	3
p	0,1	0,9

Y	1	1,35
p	0,4	0,6

Вариант 5.

X	2	4
p	0,4	0,6

Y	2	1,85
p	0,8	0,2

Вариант 6.

X	1	4
p	0,5	0,5

Y	0,4	1
p	0,9	0,1

Задание №3.

Вариант 1. Производится 4 выстрела с вероятностью по падения в цель p_1=0,6 p_2=0,4, p_3=0,5 и p_4=0,7. Найти математическое ожидание общего числа попадания.

Вариант 2. Производится 4 выстрела с вероятностью по падения в цель p_1=0,3 p_2=0,4, p_3=0,6 и p_4=0,5. Найти математическое ожидание общего числа попадания.

Вариант 3. Производится 4 выстрела с вероятностью по падения в цель p_1=0,1 p_2=0,2, p_3=0,6 и p_4=0,9. Найти математическое ожидание общего числа попадания.

Вариант 4. Производится 4 выстрела с вероятностью по падения в цель p_1=0,7 p_2=0,2, p_3=0,8 и p_4=0,5. Найти математическое ожидание общего числа попадания.

Вариант 5. Производится 4 выстрела с вероятностью по падения в цель p_1=0,5 p_2=0,4, p_3=0,9 и p_4=0,2. Найти математическое ожидание общего числа попадания.

Вариант 6. Производится 4 выстрела с вероятностью по падения в цель p_1=0,3 p_2=0,7, p_3=0,3 и p_4=0,5. Найти математическое ожидание общего числа попадания.

Задание №4.

Вариант 1. Вероятность отказа детали за время испытания на надежность равна 0,2. Найти математическое ожидание числа отказавших деталей, если испытанию будут подвергнуты 10 деталей.

Вариант 2. Вероятность отказа детали за время испытания на надежность равна 0,3. Найти математическое ожидание числа отказавших деталей, если испытанию будут подвергнуты 12 деталей.

Вариант 3. Вероятность отказа детали за время испытания на надежность равна 0,7. Найти математическое ожидание числа отказавших деталей, если испытанию будут подвергнуты 15 деталей.
Вариант 4. Вероятность отказа детали за время испытания на надежность равна 0,9. Найти математическое ожидание числа отказавших деталей, если испытанию будут подвергнуты 18 деталей.
Вариант 5. Вероятность отказа детали за время испытания на надежность равна 0,8. Найти математическое ожидание числа отказавших деталей, если испытанию будут подвергнуты 6 деталей.
Вариант 6. Вероятность отказа детали за время испытания на надежность равна 0,2. Найти математическое ожидание числа отказавших деталей, если испытанию будут подвергнуты 20деталей.

Задание №5
Вариант 1. Найти дисперсию случайной величины X – числа появлений события в 100 независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность наступления события равна 0,7.
Вариант 2. Найти дисперсию случайной величины X – числа появлений события в 130 независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность наступления события равна 0,6
Вариант 3. Найти дисперсию случайной величины X – числа появлений события в 150 независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность наступления события равна 0,2.
Вариант 4. Найти дисперсию случайной величины X – числа появлений события в 200 независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность наступления события равна 0,4.
Вариант 5. Найти дисперсию случайной величины X – числа появлений события в 400 независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность наступления события равна 0,8.
Вариант 6. Найти дисперсию случайной величины X – числа появлений события в 250 независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность наступления события равна 0,3.

Задание №6
Случайная величина X может принимать два возможных значения x_1 с вероятностью 0,3 и x_2 с вероятностью 0,7, причем $x_2 > x_1$. Найти x_1 и x_2, зная, что M (X) = 2,7 и D (X) = 0,21.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Дать определение математического ожидания
2. Что показывает дисперсия случайной величины?
3. Как найти среднее квадратичное отклонение?

Практическая работа № 7

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА ЗАПИСЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ДСВ

***ЦЕЛЬ РАБОТЫ*:** научиться строить биноминальные, геометрические, гипергеометрические распределения дискретных случайных величин.

Для выполнения работы необходимо ***знать*** понятия случайной величины, дискретной случайной величины, ее распределение и характеристики; необходимо ***уметь*** применять стандартные методы и модели к решению вероятностных задач, пользоваться таблицами.

ВРЕМЯ ВЫПОЛНЕНИЯ: 90 минут.

КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

4. Биноминальное распределение имеет место, когда производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие может либо появится, либо не появиться.

Вероятность наступления события во всех испытаниях постоянна и равна p, следовательно вероятность ненаступления равна q = 1 - p.

Биноминальным распределение определяется формулой Бернулли:

$$\mathbf{P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p^k q^{n-k}}$$

*Пример 1.*Построить закон распределения случайной величины *X* – количества домов, данных в эксплуатацию в срок, из 3 строящихся. Вероятность сдачи в эксплуатацию в срок для каждого дома одинакова и равна 0,9.

Решение

1. Возможные значения случайной величины X: x_0=0, x_1=1, x_2=2 или x_3=3.
2. Число испытаний (общее число строящихся домов):n= 3.
   Вероятность наступления события А в одном опыте (построить каждый дом в срок) p = 0,9.
3. Вероятности возможных значений p_i: определяем с помощью формулы Бернулли:

$p_0 = P(x=0) = p_3(0) = C_3^0p^0q^3= 1*0{,}9^0*0{,}1^3 = 0{,}001$

$p_1 = P(x=1) = p_3(1) = C_3^1p^1q^2= 3*0{,}9^1*0{,}1^2= 0{,}027$;

$p_2 = P(x=2) = p_3(2) = C_3^2p^2q^1= 3*0{,}9^2*0{,}1^1= 0{,}243$;

$p_3 = P(x=3) = p_3(3) = C_3^3p^3q^0= 1*0{,}9^3*0{,}1^0= 0{,}729$.

Полученные значения помогают сформировать ряд распределения.

X	0	1	2	3
p	0,001	0,027	0,243	0,729

5. **Распределение Пуассона** – имеет место, когда производится большое количество испытаний, но вероятность появления события мала.

$$\mathrm{P}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{k}) = \frac{\boldsymbol{\lambda^k e^{-\lambda}}}{\boldsymbol{k!}}, \textbf{ где } \boldsymbol{\lambda} = \textbf{np.}$$

Пример 2. Завод отправил на базу 4000 доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие проверится, равно 0,0002. Найти закон распределения числа проверенных изделий (при подсчете используйте таблицу распределения Пуассона). Вариантов случайной величины X – числа проверенных изделий должно быть столько, чтобы сумма их вероятностей была близка к 1.

Решение

1) λ = np = 4000*0,0002 = 0,8
2) Возможные значения случайной величины X:
   x_0=0, x_1=1, x_2=2, x_3=3, x_4 = 4 и т.д. до x_{4000} = 4000.
3) По таблице распределения Пуассона (приложение 3) получим:
   P(x=0) = 0,449329
   P(x=1) = 0,359463
   P(x=2) = 0,143785
   P(x=3) = 0,038343
   P(x=4) = 0,007669
   P(x=5) = 0,001227
4) Закон распределения:

X	0	1	2	3	4	5	…	4000
P	0,449329	0,359463	0,143785	0,038343	0,007669	0,001227	…	≅0

$\sum_{i=0}^{5} p_i \cong 0{,}999816 \cong 1$

6. **Геометрическое распределение** – имеет место, когда производятся независимые испытания, в каждом из которых вероятность появления события равна p. Испытания заканчиваются, как только появляется событие А.

Пример 3. Вероятность того, что стрелок попадет в мишень при одном выстреле, равна 0,8. Стрелку выдаются патроны до тех пор, пока он не попадет. Требуется составить закон распределения дискретной случайной величины X – числа патронов, выданных стрелку.

Решение

1. Возможные значения случайной величины X: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, … $x_k = k$ и т.д.
2. Вероятности возможных значений:
   $p_1 = p = 0{,}8$
   $p_2 = qp = 0{,}8*0{,}2 = 0{,}16$
   $p_3 = q^2p = 0{,}8*0{,}2^2 = 0{,}032$ и т.д.
   $p_k = q^kp = 0{,}8*0{,}2^{k-1}$

X	1	2	3	…	k	...
p	0,8	0,16	0,032	…	$0{,}8*0{,}2^{k-1}$	...

4. Гипергеометрическое распределение

Рассмотрим задачу. Пусть в партии из Nизделий имеется M стандартных. Из партии случайно отбирают n изделий с одинаковой вероятностью, причем отобранное изделие не возвращают обратно (поэтому формула Бернулли не работает). Найти вероятность, что среди потобранных изделий ровно m стандартных.

$$P(X = \boldsymbol{m}) = \frac{\boldsymbol{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}}{\boldsymbol{C_N^n}}$$

Пример 4. В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Наудачу отобраны две детали. Составить закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных.

Решение

N = 10 – число деталей в партии;
M = 8 – число стандартных деталей;
n = 2 – числоотобранных деталей;
m – число стандартных деталей среди отобранных.

1. Возможные значения случайной величины X – числа стандартных деталей среди отобранных деталей: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$.
2. Вероятности возможных значений:
   $P_0(x=0) = \frac{C_8^0 C_{10-8}^{2-0}}{C_{10}^2} = \frac{1}{45}$
   $P_1(x=1) = \frac{C_8^1 C_2^1}{C_{10}^2} = \frac{8*2}{45} = \frac{16}{45}$

   $P_2(x=1) = \frac{C_8^2 C_2^0}{C_{10}^2} = \frac{8*7/(1*2)}{45} = \frac{28}{45}$
3. Закон распределения:

X	0	1	2
P	1/45	16/45	28/45

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ И ФОРМА ОТЧЕТНОСТИ

	I вариант	II вариант
1.	Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,1. а) Составить закон распределения числа отказавших элементов в одном опыте. б) Чему равна вероятность, что откажет менее двух приборов в опыте?	По мишени проводится три выстрела с вероятностью попадания 0,8. а) Найти закон распределения случайной величины X – число попаданий в мишень. б) Чему равна вероятность, что произведено более одного попадания? в) Построить многоугольник

	в) Построить многоугольник распределения.	распределения.
2.	Учебник издан тиражом 10000 экземпляров. Вероятность того, что учебник сброшюрован неправильно, равна 0,0001. Найти закон распределения числа бракованных книг (при подсчете используйте таблицу распределения Пуассона) Вариантов случайной величины X - количества бракованных книг должно быть столько, чтобы сумма их вероятностей была близка к 1.	Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо один от другого. Вероятность отказа любого элемента в течение определенного времени равна 0,002. Найти закон распределения числа отказавших элементов (при подсчете используйте таблицу распределения Пуассона) Вариантов случайной величины X – числа отказавших элементов должно быть столько, чтобы сумма их вероятностей была близка к 1.
3.	Из орудия производится стрельба по цели до первого попадания. Вероятность попадания в цель p = 0,6.Требуется: а) составить закон распределения дискретной случайной величины X – числа патронов, выданных стрелку; б) найти наивероятнейшее число выданных стрелку патронов.	Из орудия производится стрельба по цели до первого попадания. Вероятность попадания в цель p = 0,9.Требуется: а) составить закон распределения дискретной случайной величины X – числа патронов, выданных стрелку; б) найти наивероятнейшее число выданных стрелку патронов.
4.	В партии из семи деталей имеется три стандартных. Наудачу отобраны три детали. а) составить закон распределения дискретной случайной величины X – числа стандартных деталей среди отобранных. б) найти наивероятнейшее число стандартных деталей среди отобранных.	В партии из восьми деталей имеется пять стандартных. Наудачу отобраны три детали. а) составить закон распределения дискретной случайной величины X – числа стандартных деталей среди отобранных. б) найти наивероятнейшее число стандартных деталей среди отобранных.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. В каких случаях для независимых испытаний удобно составлять биноминальное распределение, а в каких – распределение Пуассона?
2. В каких случаях можно составить геометрическое распределение?

Таблица распределения Пуассона

k\λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8	1	1,5	2
0	0,904837	0,818731	0,740818	0,670320	0,606531	0,548812	0,449329	0,367879	0,22313	0,135335
1	0,090484	0,163746	0,222245	0,268128	0,303265	0,329287	0,359463	0,367879	0,334695	0,270671
2	0,004524	0,016375	0,033337	0,053626	0,075816	0,098786	0,143785	0,18394	0,251021	0,270671
3	0,000151	0,001092	0,003334	0,007150	0,012636	0,019757	0,038343	0,061313	0,125511	0,180447
4	0,000004	0,000055	0,000250	0,000715	0,001580	0,002964	0,007669	0,015328	0,047067	0,090224
5	0	0,000002	0,000015	0,000057	0,000158	0,000356	0,001227	0,003066	0,014120	0,036089
6	0	0	0,000001	0,000004	0,000013	0,000036	0,000164	0,000511	0,003530	0,012030
7	0	0	0	0	0,000001	0,000003	0,000019	0,000073	0,000756	0,003437
8	0	0	0	0	0	0	0,000002	0,000009	0,000142	0,000859
9	0	0	0	0	0	0	0	0,000001	0,000024	0,000191
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0,000004	0,000038
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,000007
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,000001
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Практическая работа № 8

ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ ПЛОТНОСТИ И ИНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

***ЦЕЛЬ РАБОТЫ*:** научиться определять вероятности значений непрерывных случайных величин по функции распределения; научиться определять плотность распределения непрерывных случайных величин по функции распределения и наоборот.

Для выполнения работы необходимо ***знать*** понятия случайной величины, непрерывной случайной величины, ее распределение; необходимо ***уметь*** применять стандартные методы и модели к решению вероятностных задач.

ВРЕМЯ ВЫПОЛНЕНИЯ: 90 минут.

КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Случайную величину называют ***непрерывной***, если ее функция распределения есть непрерывная, кусочно-дифференцируемая функция с непрерывной производной.

Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины X называют функцию f(x) – первую производную от функции распределения F(x). $\boldsymbol{f\ (x) = F'(x)}$

Пример 1. Дана функция распределения непрерывной случайной величины X. Найти плотность рапределения f(x).

$$\boldsymbol{F\ (x)} = \begin{cases} \boldsymbol{0} & \text{при} \quad \boldsymbol{x \le 0} \\ \boldsymbol{sin\ x} & \text{при } \boldsymbol{0} < x \le \boldsymbol{\pi/2} \\ \boldsymbol{1} & \text{при} \quad \boldsymbol{x > \pi/2} \end{cases}$$

Решение. Плотность распределения равна первой производной от функции распределения:

$$\boldsymbol{f\ (x) = F'(x)} = \begin{cases} \boldsymbol{0'}, \text{при } \boldsymbol{x} < 0 \\ (\boldsymbol{sin\ x})', \text{при } \boldsymbol{0} < x \le \frac{\pi}{2} \\ \boldsymbol{1'}, \text{при } \boldsymbol{x} > \pi/2 \end{cases} = \begin{cases} \boldsymbol{0} & \text{при} \quad \boldsymbol{x} < 0 \\ \boldsymbol{cos\ x} & \text{при } \boldsymbol{0} < x \le \boldsymbol{\pi/2} \\ \boldsymbol{0} & \text{при} \quad \boldsymbol{x > \pi/2} \end{cases}$$

Вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в интервале [a,b), можно найти, используя функцию распределения и плотность распределения.

При вычислении такой вероятности по функции распределения, используется формула **P(a≤X<b)=F(b) - F(a)**.

*Пример 2***.** Случайная величина X задана функцией распределения

$$\boldsymbol{F\ (x)} = \begin{cases} \boldsymbol{0} & \text{при} \quad \boldsymbol{x \le -1} \\ \boldsymbol{x/4+1/4} & \text{при } \boldsymbol{-1} < x \le 3 \\ \boldsymbol{1} & \text{при} \quad \boldsymbol{x} > 3 \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, принадлежащее интервалу [0,2):

Решение. Так как по условию (вторая строка) на интервале [0,2) F (x) = x/4+1/4, то

P (0≤X<2) = F (2) – F (0).

F(2) –F(0) = (2/4+1/4)-(0/4+1/4)=1/2.

Получим P (0≤X<2)=1/2.

Для нахождения вероятности попадания случайной величины в интервал по плотности распределения, используется формула **P(a≤X<b)=** $\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx}$.

Пример 3. Задана плотность вероятности случайной величины X. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, принадлежащее интервалу [0,5; 1).

$$\mathbf{f}\,(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{при} \quad \boldsymbol{x} \le \mathbf{0} \\ \mathbf{2}\boldsymbol{x} & \text{при} \quad \mathbf{0} < \boldsymbol{x} \le \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \text{при} \quad \boldsymbol{x} > 1 \end{cases}$$

Решение. Искомая вероятность

$$P\,(0{,}5 \le X < 1) = \int_{0.5}^{1} 2x dx = \frac{2x^2}{2}\Big|_{0,5}^{1} = x^2\Big|_{0,5}^{1} = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$$

Зная плотность распределения можно найти функцию распределения по формуле:

$$\mathbf{F(x)} = \int_{-\infty}^{x} \boldsymbol{f(x)dx}$$

Пример 4. Случайная величина задана плотностью распределения. Найти: функцию распределения.

$$\boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{при} \quad \boldsymbol{x} \le \mathbf{0} \\ (\boldsymbol{\sin x})/\mathbf{2} & \text{при} \quad \mathbf{0} < x \le \pi \\ \mathbf{0} & \text{при} \quad \boldsymbol{x} > \pi \end{cases}$$

Решение

1. Если $-\infty < x \le 0$, то $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{x} 0dx = 0$.
2. Если $0 < x \le \pi$, то
   $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{x} \frac{\sin x}{2} dx = 0 + (-\frac{\cos x}{2})\Big|_{0}^{x} = -\frac{\cos x}{2} - (-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - \frac{\cos x}{2}$
3. Если $x > \pi$

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{\pi} \frac{\sin x}{2} dx + \int_{\pi}^{x} 0dx = 0 + (-\frac{\cos x}{2})\Big|_{0}^{\pi} + 0 = -\frac{\cos \pi}{2} - (-\frac{\cos 0}{2}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$

Ответ: $$\boldsymbol{F}\,(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{при} \quad \boldsymbol{x} \le \mathbf{0} \\ (\mathbf{1} - \boldsymbol{\cos x})/\mathbf{2} & \text{при} \quad \mathbf{0} < x \le \boldsymbol{\pi} \\ \mathbf{1} & \text{при} \quad \boldsymbol{x} > \boldsymbol{\pi}. \end{cases}$$

Пример 5. Плотность распределения непрерывной случайной величины X в интервале (-π/2, π/2) равна f(x)=a*cos(x); вне этого интервала f(x)=0. Найти постоянный параметр a.

Решение

Если функция f(x) представляет собой плотность распредеения вероятностей непрерывной случайной величины, заданной на интервале (a, b), то выполняется условие $\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{f(x)dx} = \mathbf{1}$

Найдем $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a * cosx\mathrm{dx} = \mathrm{a} * \sin(\mathrm{x})\Big|_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = a\,(\sin\frac{\pi}{2} - \sin(-\frac{\pi}{2}) = a(1+1) = 2a$

Приравнем результат к единице: 2a = 1. Таким образом, искомый параметр $a = \frac{1}{2}$.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ И ФОРМА ОТЧЕТНОСТИ

Вариант 1

Задание 1. Случайная величина X задана функцией распределения

$$\boldsymbol{F}\,(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \mathbf{0}, \text{при x} \le \mathbf{3} \\ (\boldsymbol{x} - \mathbf{3})^{\mathbf{2}}, \text{при } \mathbf{3} < x \le 4 \\ \mathbf{1}, \text{при x } > 4 \end{cases}$$

а) Найти плотность распределения f(x).
б) Построить график функций F(x) и f(x)
в) Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в

интервале $[\mathbf{3,5}; \mathbf{4}\,)$ двумя способами:

- по функции F(x)
- по функции f(x)

Задание 2. Дана функция распределения непрерывной случайной величины X

$$\boldsymbol{F\ (x)} = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{при} \quad \boldsymbol{x \le 0} \\ \boldsymbol{sin\ 2x} & \text{при} \quad \mathbf{0} < x \le \boldsymbol{\pi/4} \\ \mathbf{1} & \text{при} \quad \boldsymbol{x > \pi/4} \end{cases}$$

Найти плотность рапределения f(x) и построить ее график.

Задание 3. Задана плотность распределения. Найти функцию распределения.

$$\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{0}, \text{если } \boldsymbol{x \le 0} \\ \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}(\mathbf{sin\,3}\boldsymbol{x}), \text{если } \mathbf{0} < x \le \pi/3 \\ \mathbf{0}, \text{если } \boldsymbol{x} > \pi/3 \end{cases}$$

Задание 4. Плотность распределения непрерывной случайной величины X в интервале (1, 3) равна f(x)=a*(x-1); вне этого интервала f(x)=0. Найти постоянный параметр a.

Вариант 2

Задание 1 Случайная величина X задана функцией распределения

$$\boldsymbol{F\ (x)} = \begin{cases} \mathbf{0}, \text{при x} \le \mathbf{1} \\ \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{9}}(\mathrm{x} - \mathbf{1})^{\mathbf{2}}, \text{при } \mathbf{1} < x \le 4 \\ \mathbf{1}, \text{при x } > 4 \end{cases}$$

а) Найти плотность распределения f(x).

б) Построить график функций F(x) и f(x)

в) Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале $[\mathbf{2}; \mathbf{3}\,)$ двумя способами:

- по функции F(x)
- по функции f(x)

Задание 2. Дана функция распределения непрерывной случайной величины X

$$\boldsymbol{F\ (x)} = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{при} \quad \boldsymbol{x \le 0} \\ \boldsymbol{sin\ 4x} & \text{при} \quad \mathbf{0} < x \le \boldsymbol{\pi/8} \\ \mathbf{1} & \text{при} \quad \boldsymbol{x > \pi/8} \end{cases}$$

Найти плотность рапределения f(x) и построить ее график.

Задание 3. Задана плотность распределения. Найти функцию распределения.

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \mathbf{0}, \text{если } \boldsymbol{x \le 0} \\ (\mathbf{3/2})\boldsymbol{sin\ 3x}\ , \text{если } \mathbf{0} < x \le \boldsymbol{\pi/3} \\ \mathbf{0}, \text{если } \boldsymbol{x > \pi/3} \end{cases}$$

Задание 4. Плотность распределения непрерывной случайной величины X в интервале (-1, 1) равна f(x)=a*(x-1); вне этого интервала f(x)=0. Найти постоянный параметр a.

Вариант 3

Задание 1 Случайная величина X задана функцией распределения

$$\boldsymbol{F\ (x)} = \begin{cases} \mathbf{0}, \text{при x} \le \mathbf{1} \\ (\mathrm{x} - \mathbf{1})^{\mathbf{2}}, \text{при } \mathbf{1} < x \le 2 \\ \mathbf{1}, \text{при x } > 2 \end{cases}$$

а) Найти плотность распределения f(x).
б) Построить график функций F(x) и f(x)
в) Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале $[\mathbf{1{,}5}; \mathbf{2})$ двумя способами:

- по функции F(x)
- по функции f(x)

Задание 2. Дана функция распределения непрерывной случайной величины X

$$\boldsymbol{F}\,(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{при} \quad \boldsymbol{x} \le \mathbf{0} \\ \boldsymbol{sin}\,\mathbf{6}\boldsymbol{x} & \text{при} \quad \mathbf{0} < x \le \boldsymbol{\pi}/\mathbf{12} \\ \mathbf{1} & \text{при} \quad \boldsymbol{x} > \boldsymbol{\pi}/\mathbf{12} \end{cases}$$

Найти плотность рапределения f(x) и построить ее график.

Задание 3. Задана плотность распределения. Найти функцию распределения.

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \mathbf{0}, \text{если } \boldsymbol{x} \le \mathbf{0} \\ (\mathbf{5}/\mathbf{2})\boldsymbol{sin}\,\mathbf{5}\boldsymbol{x}, \text{если } \mathbf{0} < x \le \boldsymbol{\pi} \\ \mathbf{0}, \text{если } \boldsymbol{x} > \boldsymbol{\pi} \end{cases}$$

Задание 4. Плотность распределения непрерывной случайной величины X в интервале (0, 2) равна $f(x)=a*x^2$; вне этого интервала f(x)=0. Найти постоянный параметр a.

Вариант 4

Задание 1 Случайная величина X задана функцией распределения

$$\boldsymbol{F}\,(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \mathbf{0}, \text{при x} \le -\mathbf{1} \\ \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{16}}(\text{x} + \mathbf{1})^{\mathbf{2}}, \text{при} -\mathbf{1} < x \le 3 \\ \mathbf{1}, \text{при x } > 3 \end{cases}$$

а) Найти плотность распределения f(x).
б) Построить график функций F(x) и f(x)
в) Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале $[\mathbf{0}; \mathbf{2})$ двумя способами:

- по функции F(x)
- по функции f(x)

Задание 2. Дана функция распределения непрерывной случайной величины X

$$\boldsymbol{F}\,(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{при} \quad \boldsymbol{x} \le \mathbf{0} \\ \boldsymbol{sin}\,\mathbf{3}\boldsymbol{x} & \text{при} \quad \mathbf{0} < x \le \boldsymbol{\pi}/\mathbf{6} \\ \mathbf{1} & \text{при} \quad \boldsymbol{x} > \boldsymbol{\pi}/\mathbf{6} \end{cases}$$

Найти плотность рапределения f(x) и построить ее график.

Задание 3. Задана плотность распределения. Найти функцию распределения.

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \mathbf{0}, \text{если } \boldsymbol{x} \le \mathbf{0} \\ \mathbf{4}\boldsymbol{cos}\,\mathbf{4}\boldsymbol{x}, \text{если } \mathbf{0} < x \le \boldsymbol{\pi}/\mathbf{8} \\ \mathbf{0}, \text{если } \boldsymbol{x} > \boldsymbol{\pi}/\mathbf{8} \end{cases}$$

Задание 4. Плотность распределения непрерывной случайной величины X в интервале (-1, 1) равна $f(x)=a*x^2$; вне этого интервала f(x)=0. Найти постоянный параметр a.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какими формулами связаны функция распределения и плотность распределения непрерывной случайно величины?
2. По каким формулам можно найти вероятность попадания непрерывной случайной величины в интервал [a,b)?

Таблица синусов и косинусов

Угол x	$\mathbf{0}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$	$\boldsymbol{\pi}$	$\boldsymbol{\frac{3\pi}{4}}$	$\boldsymbol{2\pi}$
Sin(x)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
Cos(x)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	1

Практическая работа № 9

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК НСВ

***ЦЕЛЬ РАБОТЫ*:** научиться определять характеристики непрерывных случайных величин.

Для выполнения работы необходимо ***знать*** понятия случайной величины, непрерывной случайной величины, ее распределение и характеристики; необходимо ***уметь*** применять стандартные методы и модели к решению вероятностных задач.

ВРЕМЯ ВЫПОЛНЕНИЯ: 90 минут.

КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Для непрерывной случайной величины можно определить следующие числовые характеристики:

- **Математическое ожидание** – средневзвешенное по вероятностям значение случайной величины.

  M(X) = $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ - если возможные значения X принадлежат всей числовой прямой.
- **Мода** – наиболее вероятное значение случайной величины X**.**
- **Дисперсия** – характеризует разброс случайной величины вокруг ее математического ожидания.

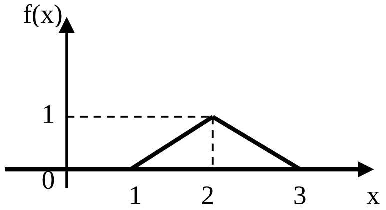
  D(X) = $\int_a^b x^2 f(x)dx - (M(x))^2$ - если возможные значения X принадлежат интервалу [a, b]

  D(X) = M(x^2) - $(M(x))^2$
- **Среднее квадратичное отклонение** -$\sigma(x) = \sqrt{D(x)}$.

Рассмотрим примеры определения числовых характеристики непрерывных случайных величин.

Пример 1. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения. Найти математическое ожидание.

f(x) = $\begin{cases} 0 \text{ при} x < 1. \\ x - 1 \text{ при } 1 \le x < 2, \\ -x + 3 \text{ при } 2 \le x < 3, \\ 0 \text{ при} x \ge 3. \end{cases}$



Решение

M(X) = $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{1} 0dx + \int_1^2 x(x-1)dx + \int_2^3 x(-x+3)dx + \int_3^{\infty} 0dx = (x^3/3 - x^2/2)\Big|_1^2 + (3x^2/2 - x^3/3)\Big|_2^3 = \left[\left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)\right] - [\left(\frac{3*9}{2} - \frac{27}{3}\right) - \left(\frac{3*4}{2} - \frac{8}{3}\right) = 2.$

Пример 2. Случайная величина задана плотностью распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{при} x < -1 \\ 3x^2, \text{при} -1 \le x \le 0 \\ 0, \text{при} x > 0 \end{cases}$$

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение этой случайной величины.

Решение

1. Найдем математическое ожидание: М(Х) = $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ = $\int_{-1}^{0} 3x^3dx = 3x^4/4 \Big|_{-1}^{0} = -3/4$.

2. Определим дисперсию.

D(X) = $\int_{-1}^{0} x^2 * 3x^2dx - (-\frac{3}{4})^2 = \int_{-1}^{0} 3x^4dx - \frac{9}{16} = 3\int_{-1}^{0} x^4\,dx - \frac{9}{16} = \frac{3x^5}{5}\Big|_{-1}^{0} - \frac{9}{16} = \left(0 - \frac{3*(-1)^5}{5}\right) - $
$- \frac{9}{16} = \frac{3}{5} - \frac{9}{16} = 0.6 - 0.5625 = 0{,}0375.$

Среднее квадратичное отклонение: $\sigma(x) = \sqrt{D(x)} = \sqrt{0{,}0375} = 0{,}19$

Пример 3. Случайная величина Х задана плотностью распределения.

$$f(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ 0{,}5\sin x, x \in (0;\pi), \\ 0, x \ge \pi \end{cases}$$

Найти моду.

Решение

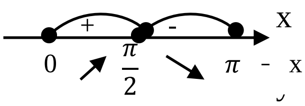
(0,5sinx)’ = 0,5 cosx

0,5cos x = 0

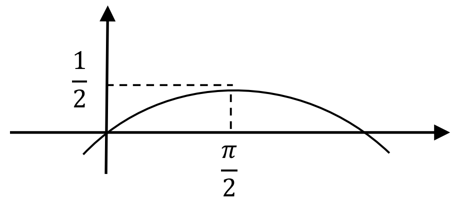
cosx = 0 при x = $\frac{\pi}{2}$ $+\pi k$ – критические точки данной функции на всей числовой прямой

x = $\frac{\pi}{2} \epsilon [0, \pi]$ – критическая точка в рассматриваемом интервале

Проверим точку x = $\frac{\pi}{2}$ на максимум:



x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{\pi}{6}$
	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$



Т.к. в точке x = $\frac{\pi}{2}$ производная меняет знак с“+”на“-“, то в этой точке плотность вероятности будет максимальна.

Мода: m = $\frac{\pi}{2}$

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ И ФОРМА ОТЧЕТНОСТИ

I вариант

1. Непрерывная случайная величина Х задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{при} x \le -1 \\ x+1, \text{при} -1 < x \le 0 \\ 1-x, \text{при } 0 < x \le 1 \\ 0, \text{при} x > 1 \end{cases}$$

а) Найти математическое ожидание. б) Построить график f(x).

2. Случайная величина задана плотностью распределения:

$$f(x)=\begin{cases}0, \text{при} x \le 4\\ \frac{2}{9}x, \text{при} 4 < x \le 5\\ 0, \text{при } x > 5\end{cases}$$

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратичное отклонение этой случайной величины. Ответы запишите в десятичных дробях с точностью до тысячных.

3. Случайная величина X в интервале (2, 4) задана плотностью распределения f(x) = $-\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{2}x-6$; вне этого интервала f(x) = 0. Найти моду величины X.

4. Случайная величина задана плотностью распределения:

$$f(x)=\begin{cases}0, \text{при} x < -1\\ \frac{3}{16}(x-1)^2, \text{при} -1 \le x \le 3\\ 1, \text{при } x > 3\end{cases}$$

Найти моду этой случайной величины. Какое это распределение?

II вариант

1. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases}0, \text{при} x \le -2\\ x+2, \text{при} -2 < x \le 0\\ 2-x, \text{при } 0 < x \le 2\\ 0, \text{при} x > 1\end{cases}$$

а) Найти математическое ожидание. б) Построить график f(x).

2. Случайная величина задана плотностью распределения:

$$f(x)=\begin{cases}0, \text{при } x \le 3\\ \frac{1}{20}x, \text{при } 3 < x \le 7\\ 0, \text{при } x > 7\end{cases}$$

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратичное отклонение этой случайной величины. Ответы запишите в десятичных дробях с точностью до тысячных.

3. Случайная величина X в интервале (3, 5) задана плотностью распределения f(x) = $-\frac{3}{4}x^2+6x-\frac{45}{4}$; вне этого интервала f(x) = 0. Найти моду величины X.

4. Случайная величина задана плотностью распределения:

$$f(x)=\begin{cases}0, \text{при} x < -3\\ \frac{3}{16}(x+1)^2, \quad \text{при} -3 \le x \le 1\\ 1, \quad \text{при } x > 1\end{cases}$$

Найти моду этой случайной величины. Какое это распределение?

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Запишите формулы для определения числовых характеристик непрерывных случайных величин.

Практическая работа № 10

ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДЛЯ НОРМАЛЬНО, РАВНОМЕРНО И ПОКАЗАТЕЛЬНО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ВЕЛИЧИН

***ЦЕЛЬ РАБОТЫ*:** научиться вычислять вероятности для случайных величин, имеющих нормальное, равномерное и показательное распределения.

Для выполнения работы необходимо ***знать*** законы распределения непрерывных случайных величин; необходимо ***уметь*** применять стандартные методы и модели к решению вероятностных задач, применять современные пакеты прикладных программ многомерного статистического анализа.

ОБОРУДОВАНИЕ: *ПК IBM, ПО Windows, Microsoft Excel.*

ВРЕМЯ ВЫПОЛНЕНИЯ: 90 минут.

КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Среди непрерывных случайных величин особого внимания заслуживают величины, имеющие один из следующих законов распределения: равномерный, показательный, нормальный.

Нормальным называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины, которое описывается плотностью:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}$$

где μ – математическое ожидание; σ – среднеквадратичное отклонение.

Вероятность попадания в интервал нормально распределенной случайной величины равна:

P(α < X < β) = Φ($\boldsymbol{\frac{\beta-\mu}{\sigma}}$) - Φ ($\boldsymbol{\frac{\alpha-\mu}{\sigma}}$), где Φ – функция Лапласа (определяется по таблице приложения 2).

Пример 1. Время загрузки Web-страницы распределено нормально, причем его математическое ожидание равно μ = 7 с, а стандартное отклонение σ = 2 с. Определите вероятность того, что время загрузки лежит в интервале 7 – 9 секунд.

Решение

По условию, α = 7, β = 9, μ = 7, σ = 2. Следовательно,

$P(7<X<9) = \Phi(\frac{9-7}{2}) - \Phi(\frac{7-7}{2}) = \Phi(1) - \Phi(0) = 0{,}3413 - 0 = 0{,}3413$.

Распределение вероятностей называют **равномерным**, если на интервале, которому принадлежат все возможные значения случайной величины, плотность вероятности постоянна.

Плотность равномерного распределения f(x) определяется формулой:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x \le a \\ \dfrac{1}{b-a}, \text{при } a < x \le b \\ 0, \text{при } x > b \end{cases}$$

Вероятность попадания в интервал равномерно распределенной случайной величины

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\alpha} < X < \beta) = \frac{\boldsymbol{\beta - \alpha}}{\boldsymbol{b} - \mathrm{a}}$$

Пример 2. Известно, что передатчик может начать работу в любой момент времени между 12 и 14 часами. Какова вероятность того, что начало передачи придется ждать не более 15 минут (0,25 часа).

Решение. Пусть Х(ч) – время начала работы передатчика. Поскольку передача может начаться в любой момент между 12 и 14 часами и все моменты равновозможны, то Х – случайная величина распределенная равномерно.

$\alpha = 12$, $\beta = 12{,}25$, $a = 12$, $b = 14$

$P(12<x<12{,}25) = \frac{12.25-12}{14-12} = \frac{0.25}{2} = 0.125$

Показательным (экспоненциальным) называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины Х, которое описывается плотностью:

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} \text{ при } x \ge 0 \end{cases}}$$, где λ – постоянная положительная величина

Функция показательного распределения определяется формулой**:**

$$\boldsymbol{F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} \text{ при } x \ge 0 \end{cases}}$$

Пример 3. Написать плотность, функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию показательного закона, если параметр $\lambda = 8$.

Решение

Искомая плотность распределения равна:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0 \\ 8e^{-8x} \text{ при } x \ge 0 \end{cases}$$

Функция распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0 \\ 1 - e^{-8x} \text{ при } x \ge 0 \end{cases}$$

Математическое ожидание $M(x) = 1/\lambda = 1/8$

Дисперсия $D = 1/\lambda^2 = 1/64$

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ И ФОРМА ОТЧЕТНОСТИ

Задание 1. Решите следующие задачи.

I вариант

1. Масса одного батона хлеба есть случайная величина, подчиненная нормальному закону распределения с математическим ожиданием 600 г и среднеквадратическим отклонением 6 г. Найдите вероятность того, что масса взятого для контроля батона из этой партии:
   a. Заключена в пределах от 580 до 600 г.
   b. Не больше 580 г
   c. С помощью правила трех сигм установите границы, в которых будет находиться масса одного батона хлеба
2. Автобусы маршрута №2 идут строго по расписанию. Интервал движения – 5 минут. Найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать автобус менее 3 минут. Найти математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение.
3. Длительность времени безотказной работы элемента имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 0{,}002$. Написать плотность распределения, функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию показательного закона. Найти вероятность того, что за время длительностью $t = 500$ ч элемент откажет.

II вариант

1. Автомобильный завод запускает в производство новый двигатель. Конструкторы двигателя предполагают, что благодаря ему средняя длина пробега автомобиля составит 160 тыс. км, а среднее стандартное отклонение – 30 тыс. км. (средняя длина пробега автомобиля – случайная

величина, подчиненная нормальному закону распределения). Найдите вероятность того, что длина пробега автомобиля с таким двигателем составит:

a. Заключена в пределах от 110 до 180 тыс. км.
b. Не более 170 тыс. км
c. С помощью правила трех сигм установите границы, в которых будет находиться длина пробега автомобиля.

2. Автобусы маршрута №2 идут строго по расписанию. Интервал движения – 5 минут. Найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать автобус более 3 минут. Найти математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение.

3. Длительность времени безотказной работы элемента имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 0{,}005$. Написать плотность, функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию показательного закона. Найти вероятность того, что за время длительностью $t = 200$ ч элемент откажет.

III вариант

1. Ежеквартальный выпуск продукции на заводе распределен по нормальному закону, где среднее значение равно 152 тыс.ед. продукции в квартал, а среднеквадратическое отклонение равно 40 тыс.ед. Найдите вероятность того, что ежеквартальный выпуск продукции на завод составит:

a. Заключен в пределах от 110 до 180 тыс. ед.
b. Не более 190 тыс. ед. продукции
c. С помощью правила трех сигм установите границы, в которых будет находиться ежеквартальный выпуск продукции на заводе.

2. Поезда метрополитена идут с интервалом 3 мин. Время ожидания поезда – равномерно распределенная случайная величина. С какой вероятностью пассажир, пришедший на платформу, будет ожидать поезд более 1 мин? Найти математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение.

3. Время ремонта прибора есть случайная величина X, распределенная по показательному закону с параметром $\lambda = \frac{1}{12}$. Найти плотность вероятности, функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X. Определить вероятность того, что на ремонт прибора потребуется не менее 15 дней.

IV вариант

1. Автомат штампует детали. Контролируемый размер детали есть случайная величина, распределенная по нормальному закону с параметрами $m = 52$ см, $\sigma = 0{,}4$ см. Найдите вероятность того, что контролируемый размер детали составит:

a. Заключен в пределах от 51,97 до 52,03 см.
b. Не более 52,3 см
c. С помощью правила трех сигм установите границы, в которых будет находиться контролируемый размер деталей.

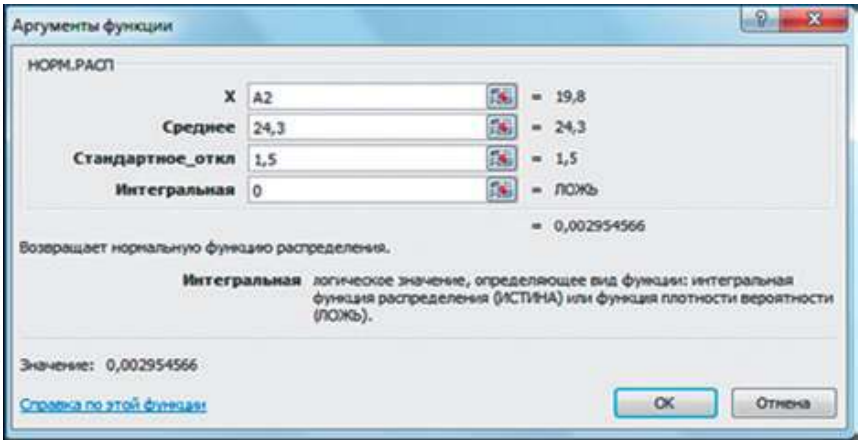
2. Поезда метрополитена идут с интервалом 3 мин. Время ожидания поезда – равномерно распределенная случайная величина. С какой вероятностью пассажир, пришедший на платформу, будет ожидать поезд менее 1 мин? Найти математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение.

4. Срок службы жесткого диска компьютера – случайная величина, распределенная по показательному закону распределения с параметром $\lambda = \frac{1}{12}$. Найти плотность вероятности, функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X. Определить вероятность безотказной службы жесткого диска свыше 18 тыс.ч.

Задание 2. Постройте в электронной таблице Microsoft Excel кривую Гаусса.

1. Столбец А заполняется при помощи автозаполнения значениями от 19,8 до 28,8 с шагом 0,5.
2. Для заполнения столбца В используется стандартная функция группы Статистические: НОРМ. РАСП
3. Для построения графика функции используется *Мастер диаграмм* (тип диаграммы – График с маркером).
4. Меняя значения математического ожидания и дисперсии распределения, получите различные кривые — «колокола»: крутые или пологие

	A	B
1	x	f(x)
2	19,8	0,002955
3	20,3	0,007597
4	20,8	0,017481
5	21,3	0,035994
6	21,8	0,066318
7	22,3	0,10934
8	22,8	0,161314
9	23,3	0,212965
10	23,8	0,251589
11	24,3	0,265962
12	24,8	0,251589
13	25,3	0,212965
14	25,8	0,161314
15	26,3	0,10934
16	26,8	0,066318
17	27,3	0,035994
18	27,8	0,017481
19	28,3	0,007597
20	28,8	0,002955
21	29,3	0,001028



КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Приведите примеры действия нормального и показательного закона распределений в жизни.

Практическая работа № 11

ПОСТРОЕНИЕ ЭМПИРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

***ЦЕЛЬ РАБОТЫ*:** научиться строить статические распределения и изображать их графически.

Для выполнения работы необходимо ***знать*** выборочный метод математической статистики, понятия вероятности и частоты; необходимо ***уметь*** применять стандартные методы и модели к решению статистических задач, пользоваться расчетными формулами, таблицами, графиками при решении статистических задач.

ВРЕМЯ ВЫПОЛНЕНИЯ: 90 минут.

КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Ранжирование предполагает упорядочение данных выборки. В результате ранжирования по возрастанию получается ***вариационный ряд***.

Проранжированные данные удобнее записать в виде таблицы, в которой указывается перечень вариант и их частот (относительных частот). Такая таблица называется ***таблицей частот (относительных частот) или статистическим распределением***. Статистические распределения можно также записывать в виде последовательности интервалов и соответствующих им частот.

Для наглядности строятся графики статистического распределения: полигон и гистограмму.

Полигоном частот (относительных частот) называется ломаная, отрезки которой соединяют точки с абсциссами равными вариантам и ординатами, равными частотам (относительным частотам) соответствующих вариантов.

Гистограммой частот (относительных частот) называется ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основаниями которых случат частичные интервалы длиной h, а высоты равны отношению n/h (W/h).

Пример 1. Дан статистический ряд: 2 2 3 3 3 3 4 2 3 3 2 3 2 3 2 3 2 4 3 2 2 3 2 4 5 2 3 3 2 4 3 2 3 4 3 3 2 3 5 3.

а) построить для него вариационный ряд; б) построить статистическое распределение для частот и относительных частот; в) дополнить статистическое распределение накопленными частотами;

г) построить полигон частот и относительных частот.

Решение

а) Для получения вариационного ряда сгруппируем одинаковые значения исходного ряда и запишем их в порядке возрастания: 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 4 4 4 4 4 5 5.

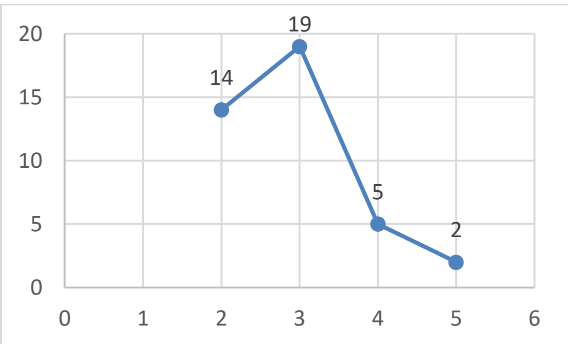
б) Подсчитав частоты каждой варианты, построим статистическое распределение. Для нахождения относительных частот используем формулу: $W_i = n_i/n$ (где n – объем выборки). В нашем примере n = 40.

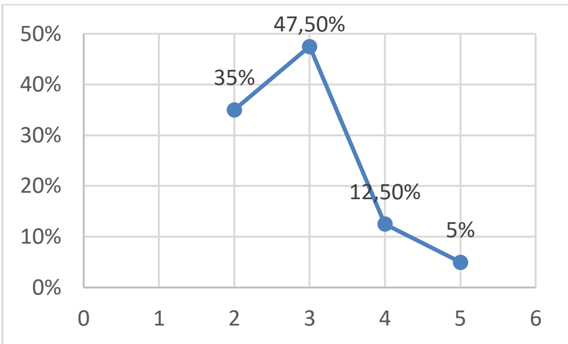
x_i	2	3	4	5
n_i	14	19	5	2
W_i	0,35	0,475	0,125	0,05

в) Накопленная частота S_i показывает, какая доля чисел статистического ряда не превышает данного значения. Накопленные частоты получаются из относительных частот накопительным суммированием.

x_i	2	3	4	5
n_i	14	19	5	2
W_i	0,35	0,475	0,125	0,05
S_i	0,35	0,825	0,95	1

г) Построим полигон частот, отложив по оси абсцисс значения x_i, а по оси ординат - n_i. Аналогично построим полигон относительных частот.





Пример 2. На школьниках 1-го «А» класса было проведено исследование для выяснения того, сколько весит портфель первоклассника. В результате взвешиваний был получен следующий статистический ряд (масса каждого портфеля в кг): 2,1; 2,45; 1,9; 2,6; 3,1; 1,95; 3,4; 4,3; 1,15; 2,7; 2,2; 3,2; 2,4; 2,2; 1,8; 1,5; 2,4; 2,25; 2,6; 1,75.

а) постройте статистический ряд в виде интервальной таблицы частот, определите относительные частоты на каждом интервале.

б) постройте гистограмму частот и относительных частот.

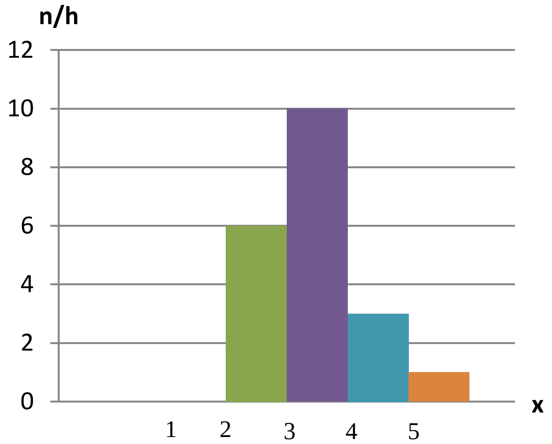
Решение

а) Для построения статистического ряда данных в виде интервальной таблицы частот разобьем все значения выборки на равные промежутки по 1 кг и подсчитаем число попаданий в каждый из них. Для нахождения относительных частот используем формулу: $W_i = n_i/n$. В нашем примере n = 20.

x_i	1-2	2-3	3-4	4-5
n_i	6	10	3	1
W_i	0,3	0,5	0,15	0,05

б) Для построения гистограммы частот определим для каждого интервала его длину h и плотность частоты (n_i/h).

h = 1 (определяется как разность x_i интервала); $n_1/h=6/1=6$; $n_2/h=10/1=10$; $n_3/h=3/1=3$; $n_4/h=1/1=1$.



Аналогично строится гистограмма относительных частот.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ И ФОРМА ОТЧЕТНОСТИ

I вариант

1. Дан числовой ряд, представляющий итоговые оценки по математике студентов 1 курса:
3 4 5 4 4 3 5 4 4 3 5 4 5 2 3 3 4 4 4 5 3 3 5 5 4 5 2 3 3 4.

а) построить вариационный ряд; б) построить статистическое распределение для частот и относительных частот; в) дополнить статистическое распределение накопленными частотами;

г) построить полигон частот и относительных частот.

2. Перед вами выборка, полученная по результатам изучения обменного курса некоторой валюты в 20-ти обменных пунктах города: 26,45; 26,4; 26,41; 26,45; 26,66; 26,53; 26,55; 26,44; 26,8; 26,67; 26,77; 26,43; 26,7; 26,6; 26,68; 26,58; 26,55; 26,54; 26,57; 26,59

а) Разбейте весь интервал от 26,0 до 27,0 на пять интервалов длиной 0,2, сгруппируйте данные и постройте по ним интервальную таблицу частот.

б) постройте гистограмму частот.

II вариант

1. Сведения о числе пропущенных пар по математической статистике у 25 студентов второго курса имеют вид: 4 3 6 0 0 0 5 0 2 2 4 5 3 0 0 2 4 5 4 5 5 6 0 0 6.

а) построить вариационный ряд; б) построить статистическое распределение для частот и относительных частот; в) дополнить статистическое распределение накопленными частотами;

г) построить полигон частот и относительных частот.

2. В отделе мужской обуви универмага в течение дня производился учет стоимости проданной обуви. Были получены следующие результаты (в рублях):

1200, 1110, 2300, 890, 320, 1200, 560, 1340, 1400, 1050, 1050, 4700, 3200, 2900, 2100, 2450, 890, 1110, 1200, 1200, 2300, 1050, 1400, 1200, 890, 320, 1320, 890, 1100, 1050

а) Представьте эти данные в виде интервальной таблицы абсолютных и относительных частот, разбив диапазон цен от 0 до 5000 рублей на интервалы длиной по 1000 рублей.

б) постройте гистограмму частот.

III вариант

1. Дана случайная выборка: 46, 45, 48, 45, 43, 43, 43, 48, 45, 44, 44, 48, 48, 44, 45, 43, 44, 48, 44, 44.

а) построить вариационный ряд; б) построить статистическое распределение для частот и относительных частот; в) дополнить статистическое распределение накопленными частотами;

г) построить полигон частот и относительных частот.

2. Перед вами выборка: 30,8; 38,7; 36,5; 38,4; 37,5; 36,5; 34,2; 39,6; 30,8; 32,7; 38,7; 35,5; 36,1; 35,1; 38,1; 39,2; 37,0; 34,2; 36,1; 36,1; 38,9; 35,2; 32,5; 37,8; 34,2; 36,5; 37,3; 38,1; 39,0; 30,2.

а) Разбейте весь интервал от 30,0 до 40,0 на пять интервалов длиной 2, сгруппируйте данные и постройте по ним интервальную таблицу частот.

б) постройте гистограмму частот.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что такое генеральная совокупность и выборка?
2. Что представляет собой статистическое распределение?

Практическая работа № 12

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ВЫБОРКИ

***ЦЕЛЬ РАБОТЫ*:** научиться определять числовые характеристики выборок по статистическому ряду и статистическому распределению.

Для выполнения работы необходимо ***знать*** выборочный метод математической статистики, понятия вероятности и частоты, характеристики выборки; необходимо ***уметь*** применять стандартные методы и модели к решению статистических задач, пользоваться расчетными формулами, таблицами, графиками при решении статистических задач.

ВРЕМЯ ВЫПОЛНЕНИЯ: 90 минут.

КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Пусть выборка задана в виде таблицы частот.

x_i	x_1	x_2	…	x_k
n_i	n_1	n_1	…	n_k
W_i	W_1	W_2	…	W_k

Для нахождения числовых характеристик используются следующие формулы:

1. **Среднее**: $\bar{x} = \frac{x_1n_1+x_2n_2+\cdots+x_kn_k}{n}$. Для интервальной таблицы в качестве варианты x берется середина интервала.
2. **Мода (модальный интервал)** – значение варианты x с большей частотой.
3. **Медиана** – значение варианты x, находящейся в середине ряда.
   a. Если вариационный ряд содержит нечетное количество чисел, то нужно взять число, которое находится ровно посередине. Если же ряд содержит четное количество чисел, то нужно взять два средних числа и найти их полусумму.
   b. При нахождении медианы по таблице частот нужно найти первое значение накопленной частоты, превосходящее 0,5, и выбрать соответствующее ему значение

числового ряда. Если ряд имеет четное число слагаемых, тогда ровно посредине вариационного ряда будут находиться два значения: то, для которого накопленная частота равна 0,5, и следующее за ним. Для вычисления медианы нужно взять их полусумму.

c. Для вычисления медианы по интервальной таблице частот используют пропорциональное деление отрезка, на котором происходит «перевал» накопленной частоты через 0,5.

Если границы интервала обозначить за $x_{нач}$ и $x_{кон}$, накопленные частоты на этих границах за $S_{нач}$ и $S_{кон}$, то медиана d вычисляется по формуле:

$$\frac{d - x_{нач}}{x_{кон} - x_{нач}} = \frac{0{,}5 - S_{нач}}{S_{кон} - S_{нач}}$$

4. **Дисперсия**: $D = \frac{(x_1-\overline{x})^2 n_1 + (x_2-\overline{x})^2 n_2 + \cdots + (x_k-\overline{x})^2 n_k}{n}$ или D = $\overline{x^2} - (\bar{x})^2$. Для интервальной таблицы в качестве варианты x берется середина интервала.

5. **Среднее квадратическое отклонение**: $\sigma = \sqrt{D}$.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ И ФОРМА ОТЧЕТНОСТИ

I вариант

1. Для выборки 7; 3; 3; 6; 4; 5; 1; 2; 1; 3 определить среднее, моду и медиану.

2. Дано статистическое распределение выборки:

x_i	0,1	0,5	0,6	0,8
n_i	5	15	20	10

Определить среднее, моду, медиану, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

3. В таблице приведены результаты измерения роста случайно отобранных 100 студентов:

Рост	154-158	158-162	162-166	166-170	170-174	174-178	178-182
Число студентов	10	14	26	28	12	8	2

Определите среднее, моду, медиану и дисперсию роста обследованных студентов.

II вариант

1. Для выборки 1; 2; 3; 4; 5; 5; 9; 6; 4 определить среднее, моду и медиану.

2. Дано статистическое распределение выборки:

x_i	18,4	18,6	19,3	19,6
n_i	5	10	20	15

Определить среднее, моду, медиану, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

3. В таблице приведены данные о росте участников легкоатлетических соревнований:

Рост	160-165	165-170	170-175	175-180	180-185	185-190
Число участников	5	12	19	25	10	7

Определите среднее, моду, медиану и дисперсию роста обследованных студентов.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Сопоставьте числовые характеристики статистических выборок с числовыми характеристиками случайных величин. Выявите сходство и различие характеристик.

Практическая работа № 13

ТОЧЕЧНЫЕ И ИНТЕРВАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ

***ЦЕЛЬ РАБОТЫ*:** научиться находить точечные и интервальные оценки, оценивать математическое ожидание нормального распределения.

Для выполнения работы необходимо ***знать*** выборочный метод математической статистики, понятия вероятности и частоты, характеристики выборки; необходимо ***уметь*** применять стандартные методы и модели к решению статистических задач, пользоваться расчетными формулами, таблицами, графиками при решении статистических задач.

ВРЕМЯ ВЫПОЛНЕНИЯ: 90 минут.

КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Точечной называется статистическая оценка, которая определяется одним числом $\Theta^* = f(x_1, x_2, \dots x_n)$, где $x_1, x_2, \dots x_n$ – результаты n наблюдений над признаком X. По сути точечная оценка – это число, оцениваемое на основе наблюдений, предположительно близкое к оцениваемому параметру.

a. **Несмещенной** называется точечная оценка, математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру при любом объеме выборки.

b. **Смещенной** называется точечная оценка, математическое ожидание которой не равно оцениваемому параметру.

Несмещенной оценкой генеральной средней является выборочная средняя:

$$\bar{x}_в = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \dots + x_k n_k}{n}$$

Смещенной оценкой генеральной дисперсии является выборочная дисперсия:

$$D_в = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 n_1 + (x_2 - \bar{x})^2 n_2 + \dots + (x_k - \bar{x})^2 n_k}{n}$$

Несмещенной оценкой генеральной дисперсии является исправленная выборочная дисперсия:

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_в$$

Интервальной называют оценку, которая определяется двумя числами — концами интервала**. Доверительный интервал** – это интервал, в который с заданной вероятностью попадет неизвестное значение оцениваемого параметра распределения.

Доверительный интервал для оценки математического ожидания нормального распределения при известной дисперсии имеет следующий смысл: с надежностью γ можно утверждать, что доверительный интервал $(\bar{x} - t\sigma/\sqrt{n},\ \bar{x} + t\sigma/\sqrt{n})$ покрывает неизвестный параметр a; точность оценки $\delta = t\sigma/\sqrt{n}$.

$$P(\bar{x} - t\sigma/\sqrt{n} < a < \bar{x} + t\sigma/\sqrt{n}) = 2\Phi(t) = \gamma$$

Доверительный интервал для оценки математического ожидания нормального распределения при неизвестной дисперсии имеет следующий вид:

$P(\bar{x} - t_\gamma * s/\sqrt{n} < a < \bar{x} + t_\gamma * s/\sqrt{n}) = \gamma$, где s - «исправленное» выборочное среднее квадратическое отклонение, t_γ находят по таблице приложения 4 по заданным n и γ.

Пример 1. Случайная величина X имеет нормальное распределение с известным средним квадратическим отклонением σ = 3. Найти доверительные интервалы для оценки неизвестного математического ожидания a по выборочным средним $\bar{x}$, если объем выборки n = 36 и задана надежность оценки γ = 0,95.

Решение

Найдем t. Из соотношения 2Φ(t) = 0,95 получим Φ(t) = 0,475. По таблице приложения 2 находим t = l,96.

Найдем точность оценки: $\delta = t\sigma/\sqrt{n} = 1.96*3/\sqrt{36} = 0{,}98$

Получим доверительный интервал: $(\bar{x} - 0{,}98; \bar{x} + 0{,}98)$.

Пример. 2 Количественный признак X генеральной совокупности распределен нормально. По выборке объема n = 16 найдены выборочная средняя $\bar{x}$ = 20,2 и «исправленное» среднее квадратическое отклонение s = 0,8. Оценить неизвестное математическое ожидание при помощи доверительного интервала с надежностью 0,95.

Решение

Найдем t_γ. Пользуясь таблицей приложения 4 при γ = 0,95 и n = 16, получим t_γ = 2,13.

Найдем доверительные границы:

$\bar{x} - t_\gamma * s/\sqrt{n} = 20{,}2 - 2{,}13*0{,}8/\sqrt{16} = 19{,}774$.

$\bar{x} + t_\gamma * s/\sqrt{n} = 20{,}2 + 2{,}13*0{,}8/\sqrt{16} = 20{,}626$.

Итак, с надежностью 0,95 неизвестный параметр a заключен в доверительном интервале 19,774 < a < 20,626.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ И ФОРМА ОТЧЕТНОСТИ

I вариант

4. Из генеральной совокупности извлечена выборка объемом n = 50. Найти несмещенную оценку генеральной средней.

x_i	2	5	7	10
n_i	16	12	8	14

5. По выборке объема n = 51 найдена смещенная оценка $D_в$ = 5 генеральной дисперсии. Найти несмещенную оценку дисперсии генеральной совокупности.
6. Найти доверительный интервал для оценки с надежностью 0,95 неизвестного математического ожидания **a** нормально распределенного признака X генеральной совокупности, если генеральное среднее квадратическое отклонение σ = 5, выборочная средняя $\bar{x}$ = 14 и объем выборки n = 25.
7. По данным девяти независимых равноточных измерений некоторой физической величины найдены среднее арифметическое результатов измерений $\bar{x}$ = 30,1 и «исправленное» среднее квадратическое отклонение s = 6. Оценить истинное значение измеряемой величины с помощью доверительного интервала с надежностью γ = 0,99. Предполагается, что результаты измерений распределены нормально.
8. Выборка из большой партии электроламп содержит 100 ламп. Средняя продолжительность горения лампы выборки оказалась равной 1000 ч. Найти с надёжностью 0,95 доверительный интервал для средней продолжительности **a** горения лампы всей партии, если известно, что среднее квадратическое отклонение продолжительности горения лампы 40 ч.

II вариант

4. Из генеральной совокупности извлечена выборка объемом n = 60. Найти несмещенную оценку генеральной средней.

x_i	1	3	6	26
n_i	8	40	10	2

5. По выборке объема n = 41 найдена смещенная оценка $D_в$ = 3 генеральной дисперсии. Найти несмещенную оценку дисперсии генеральной совокупности.

6. Найти доверительный интервал для оценки с надежностью 0,99 неизвестного математического ожидания **а** нормально распределенного признака X генеральной совокупности, если известны генеральное среднее квадратическое отклонение $\sigma = 4$, выборочная средняя $\bar{x} = 10{,}2$ и объем выборки $n = 16$.

7. По данным 16 независимых равноточных измерений некоторой физической величины найдены среднее арифметическое результатов измерений $\bar{x} = 42{,}8$ и «исправленное» среднее квадратическое отклонение $s = 1$. Оценить истинное значение измеряемой величины с помощью доверительного интервала с надежностью $\gamma = 0{,}95$. Предполагается, что результаты измерений распределены нормально.

8. Одним и тем же прибором со средним квадратическим отклонением случайных ошибок измерений 40 м произведено 5 равноточных измерений расстояния от орудия до цели. Найти доверительный интервал для оценки истинного расстояния **а** до цели с надёжностью 0,95, зная среднее арифметическое результатов измерений 2000 м.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

3. Чем несмещенная точечная оценка отличается от смещенной?
4. Что такое доверительный интервал?

Таблица значений $t_\gamma = t(\gamma, n)$

n	γ			n	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,001	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Практическая работа № 14

ПОСТРОЕНИЕ ВЫБОРОЧНОГО УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ ЛИНИИ РЕГРЕССИИ. РАБОТА В ПРИКЛАДНОЙ ПРОГРАММЕ МНОГОМЕРНОГО СТАТИСТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

***ЦЕЛЬ РАБОТЫ*:** научиться строить выборочное уравнение прямой линии регрессии, работать в прикладной программе многомерно статистического анализа.

Для выполнения работы необходимо ***знать*** выборочный метод математической статистики, характеристики выборки, понятие вероятности и частоты; необходимо ***уметь*** применять стандартные методы и модели к решению статистических задач, пользоваться расчетными формулами, таблицами, графиками при решении статистических задач, применять современные пакеты прикладных программ многомерного статистического анализа

ОБОРУДОВАНИЕ: ПК IBM, ПО Windows, STATISTICA.

ВРЕМЯ ВЫПОЛНЕНИЯ: 90 минут.

КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X имеет вид: y = ρx + b,
где $\rho = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - (\sum x)^2}$ – выборочный коэффициент регрессии Y на X
$b = \frac{\sum x^2 \sum y - \sum x \sum xy}{n\sum x^2 - (\sum x)^2}$ – свободный член

Пример 1. Найти выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X по данным пяти наблюдений:

X	1.0	1.5	3.0	4.5	5.0
Y	1.25	1.4	1.5	1.75	2.25

Решение

1. Составим расчетную таблицу:

x	y	x^2	xy
1	1.25	1.0	1.25
1.5	1.4	2.25	2.1
3.0	1.5	9.0	4.5
4.5	1.75	20.25	7.875
5.0	2.25	25.0	11.25
Σx = 15	Σy = 8.15	Σx^2 = 57.5	Σxy = 26.975

2. Найдем выборочный коэффициент регрессии и свободный член:

$$\rho = \frac{5 * 26,975 - 15 * 8,15}{5 * 57,5 - 15^2} = 0,202$$

$$b = \frac{57.5 * 8.15 - 15 * 26.975}{5 * 57,5 - 15^2} = 1.024$$

3. Получаем уравнение регрессии: Y = 0.202x +1.024

При проведении регрессионного анализа и других статистических расчётов часто используются прикладные компьютерные программы, такие как Microsoft Office Excel, Stadia, Statistica. Процедура регрессионного анализа в данных программах состоит из нескольких этапов:

1. задание математической формы уравнения регрессии и определение параметров регрессии (коэффициентов регрессионного уравнения).
2. определение взаимосвязи результативного признака и факторов, проверка статистической значимости уравнения регрессии.
3. проверка статической значимости каждого коэффициента уравнения регрессии и определение их доверительных интервалов.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ И ФОРМА ОТЧЕТНОСТИ

Задание 1. Построить выборочное уравнение регрессии и его график.

I вариант

Найти выборочное уравнение прямой линии регрессии по данным n=8 наблюдений, которые получены при изучении зависимости количества продаж товара у от затрат на рекламу этого товара х:

х	1,5	4,0	5,0	7,0	8,5	10,0	11,0	12,5	12,8	13,2
у	5,0	4,5	7,0	6,5	9,5	9,0	11,0	9,0	9,8	11,2

Построить график по результатам измерений, на этом же графике построить найденное выборочное уравнение прямой линии регрессии.

II вариант

Исследование зависимости между среднемесячными доходами Х на семью (в тыс. у.е.) и расходами Y на покупку кондитерских изделий (в у.е.) представлено в таблице:

X	4,8	3,8	5,4	4,2	3,4	4,6	3,4	4,8	5,0	3,8
Y	75	68	78	71	64	73	66	75	75	65

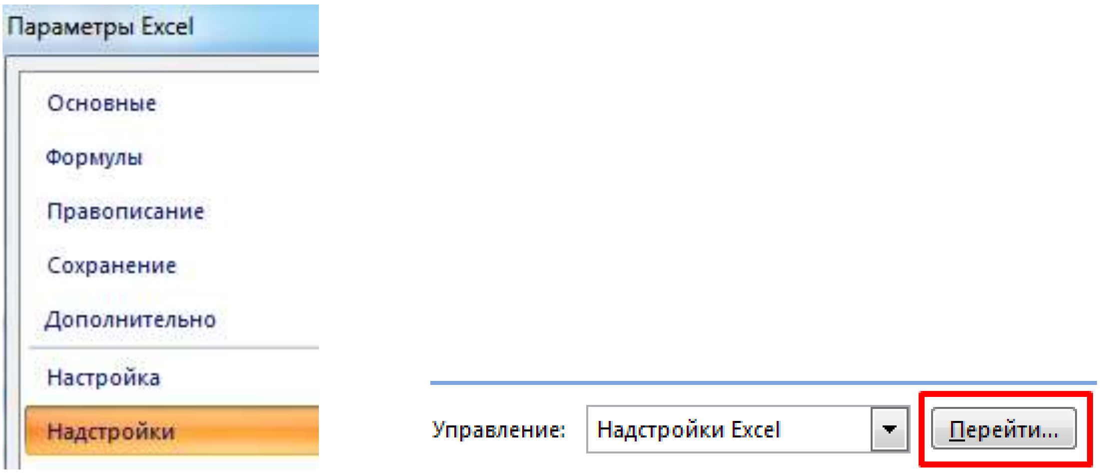
Найти выборочное уравнение прямой линии регрессии.
Построить график по результатам измерений, на этом же графике построить найденное выборочное уравнение прямой линии регрессии.

Задание 2. Построить линейную регрессионную модель в ПО Microsoft Excel.
Задача. На 6 предприятиях была проанализирована среднемесячная заработная плата и количество уволившихся сотрудников. Необходимо определить зависимость числа уволившихся сотрудников от средней зарплаты.

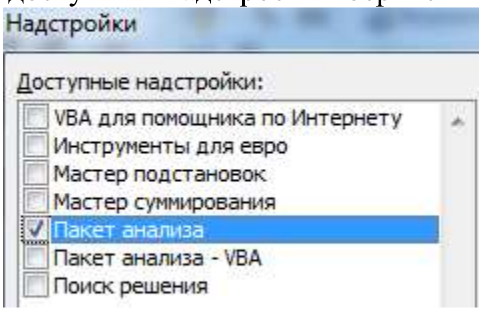
	A	B	C
1		К-во ув.	З/п
2		у	х
3	1	60	100
4	2	35	150
5	3	20	200
6	4	20	250
7	5	15	300
8	6	15	350

Модель линейной регрессии имеет следующий вид:
$У = a_0 + a_1x_1 + \ldots + a_кx_к$.
где а – коэффициенты регрессии, х – влияющие переменные, k – число факторов.
В нашем примере в качестве У выступает показатель уволившихся работников. Влияющий фактор – заработная плата (х).
В Excel существуют встроенные функции, с помощью которых можно рассчитать параметры модели линейной регрессии, но удобнее это сделать с помощью надстройки «Пакет анализа».
Алгоритм решения задачи в ПО Excel

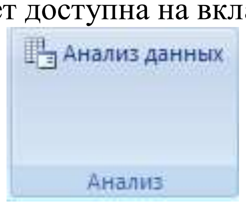
1. Активируйте надстройку «Пакет анализа»: нажмите кнопку «Офис» и перейдите на вкладку *Параметры Excel – Надстройки.*
   Внизу в поле «Управление» необходимо выбрать надпись «Надстройки Excel» и нажать на кнопку «Перейти».



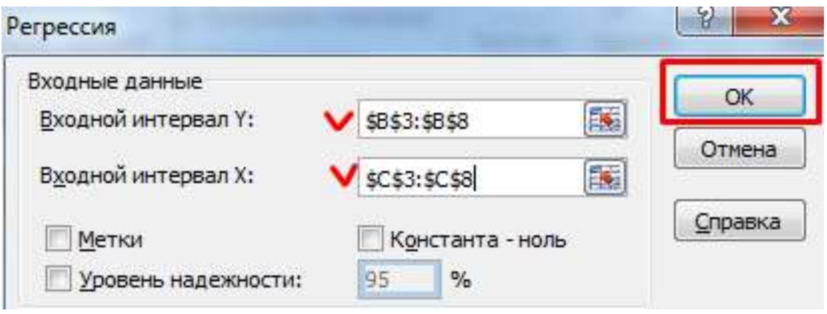
Из открывшегося списка доступных надстроек выберите «Пакет анализа» и нажмите ОК.



После активации надстройка будет доступна на вкладке «Данные».



2. Откройте меню инструмента «Анализ данных» и выберите пункт «Регрессия».
3. Откроется меню для выбора входных значений и параметров вывода. В полях для исходных данных укажите диапазон описываемого параметра (У) и влияющего на него фактора (X). Остальное можно и не заполнять.



4. После нажатия ОК, программа отобразит расчеты на новом листе (можно выбрать интервал для отображения на текущем листе или назначить вывод в новую книгу).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	ВЫВОД ИТОГОВ								
3	*Регрессионная статистика*								
4	Множественный R	0,868736918							
5	R-квадрат	0,754703833							
6	Нормированный R-квадрат	0,693379791							
7	Стандартная ошибка	9,710083125							
8	Наблюдения	6							
10	Дисперсионный анализ								
11		*df*	*SS*	*MS*	*F*	*ачимость F*			
12	Регрессия	1	1160,357143	1160,357143	12,30681818	0,024714			
13	Остаток	4	377,1428571	94,28571429					
14	Итого	5	1537,5						
16		*Коэффициенть*	*Стандартная ошибка*	*t-статистика*	*P-Значение*	*Нижние 95%*	*Верхние 95%*	*Нижние 95,0%*	*Верхние 95,0%*
17	Y-пересечение	64,14285714	11,17212274	5,741331225	0,004560379	33,12407	95,16164	33,12407	95,16164
18	Переменная X 1	-0,162857143	0,046423077	-3,508107493	0,024714164	-0,29175	-0,03397	-0,29175	-0,03397

5. Самостоятельно постройте по исходным данным точечную диаграмму. Добавьте линию тренда.

Интерпретация результатов

R-квадрат – коэффициент детерминации. В нашем примере – 0,755, или 75,5%. Это означает, что расчетные параметры модели на 75,5% объясняют зависимость между изучаемыми параметрами. Чем выше коэффициент детерминации, тем качественнее модель. Хорошо – выше 0,8. Плохо – меньше 0,5

Коэффициент Y-пересечение 64,1428 показывает, каким будет Y, если все переменные в рассматриваемой модели будут равны 0. То есть на значение анализируемого параметра влияют и другие факторы, не описанные в модели.

Коэффициент Переменная X -0,16285 показывает весомость переменной X на Y. То есть среднемесячная заработная плата в пределах данной модели влияет на количество уволившихся с весом -0,16285 (это небольшая степень влияния). Знак «-» указывает на отрицательное влияние.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какая зависимость называется корреляционной?
2. Какие выводы позволяют сделать полученные в задании 2 значения R-квадрата и коэффициента Переменная X?

Литература

Основная литература:

1. Спирина М.С. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования/М.С. Спирина, П.А. Спирин. – М.: Издательский центр «Академия», 2017. - 352 с.

Дополнительная литература:

1. Спирина М.С. Теория вероятностей и математическая статистика. Сборник задач: учеб. пособие для студ. учреждений сред. проф. образования/М.С. Спирина, П.А. Спирин. – М.: Издательский центр «Академия», 2017. - 192 с.
2. Попов, А. М. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для среднего профессионального образования / А. М. Попов, В. Н. Сотников. — Москва: Издательство Юрайт, 2021. — 434 с. *(образовательная платформа Юрайт https://urait.ru/).*
3. Васильев, А. А. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник и практикум для среднего профессионального образования / А. А. Васильев. Москва: Издательство Юрайт, 2021. — 232 с. *(образовательная платформа Юрайт https://urait.ru/).*
4. Калинина, В. Н. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для среднего профессионального образования / В. Н. Калинина. — Москва: Издательство Юрайт, 2021. — 472 с. *(образовательная платформа Юрайт https://urait.ru/).*
5. Сидняев, Н. И. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для среднего профессионального образования / Н. И. Сидняев. — Москва: Издательство Юрайт, 2021. — 219 с. *(образовательная платформа Юрайт https://urait.ru/).*

Интернет-ресурсы:

1. Прикладная математика. Справочник математических формул. Примеры и задачи с решениями. [Электронный ресурс]. – Форма доступа: http://www.pm298.ru
2. Теория вероятностей в интернете [Электронный ресурс]. – Форма доступа: http://www.nauki-online.ru/teoriya-veroyatnostey
3. Теорвер-Онлайн. Интернет-учебник. [Электронный ресурс]. – Форма доступа: http://new.math.msu.su/department/probab/io/teorver-online/
4. «МатБюро». Теория вероятностей [Электронный ресурс]. – Форма доступа: https://www.matburo.ru/tv.php
2. Прилепова В.В. Теория вероятностей в ЕГЭ и ОГЭ [Электронный ресурс]. – Форма доступа: https://4ege.ru/matematika/52134-teoriya-veroyatnosti-v-ege-i-oge.html

Приложение 1

Таблица значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013

Приложение 2

Таблица значений функции Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}\,dt$

x	Сотые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,9	0,499952									
4,0	0,499968									
4,5	0,499997									
5,0	0,49999971									

Приложение 3

Таблица распределения Пуассона

k\λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8	1	1,5	2
0	0,904837	0,818731	0,740818	0,670320	0,606531	0,548812	0,449329	0,367879	0,22313	0,135335
1	0,090484	0,163746	0,222245	0,268128	0,303265	0,329287	0,359463	0,367879	0,334695	0,270671
2	0,004524	0,016375	0,033337	0,053626	0,075816	0,098786	0,143785	0,18394	0,251021	0,270671
3	0,000151	0,001092	0,003334	0,007150	0,012636	0,019757	0,038343	0,061313	0,125511	0,180447
4	0,000004	0,000055	0,000250	0,000715	0,001580	0,002964	0,007669	0,015328	0,047067	0,090224
5	0	0,000002	0,000015	0,000057	0,000158	0,000356	0,001227	0,003066	0,014120	0,036089
6	0	0	0,000001	0,000004	0,000013	0,000036	0,000164	0,000511	0,003530	0,012030
7	0	0	0	0	0,000001	0,000003	0,000019	0,000073	0,000756	0,003437
8	0	0	0	0	0	0	0,000002	0,000009	0,000142	0,000859
9	0	0	0	0	0	0	0	0,000001	0,000024	0,000191
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0,000004	0,000038
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,000007
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,000001
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Приложение 4

Таблица значений $t_\gamma = t(\gamma, n)$

n	γ			n	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,001	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				