Министерство образования, науки и молодежной политики Нижегородской области
Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение
«Арзамасский коммерческо-технический техникум»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

ЕН. 02 Дискретная математика с элементами математической логики

Специальность СПО:
09.02.07 Информационные системы и программирование

Арзамас
2022 г.

Рекомендованы к использованию
методическим объединением
информационных дисциплин
Протокол №___
от «___»_____________20 г

Председатель МО:
_________________Н.И. Богомолова

Составлены в соответствии с требованиями к результатам освоения ППССЗ по специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование

И.о. зам. директора по УиНМР
__________________ Н.В. Слюдова

Н.Г. Саблукова, к.п.н., преподаватель высшей квалификационной категории ГБПОУ «Арзамасский коммерческо-технический техникум»;

Методические указания содержат задания к практическим работам, порядок их выполнения, рекомендации, перечень контрольных вопросов по каждой практической работе, требования к знаниям и умениям. Приведен список основной литературы для подготовки к практическим работам.

Методические указания предназначены для обучающихся **специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование**

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Практические работы направлены на формирование практических учебных умений применения методов дискретной математики к решению различных задач. Включенные в практические работы задачи стимулируют исследовательскую и творческую деятельность, развивают познавательные интересы, помогают не только глубже понять математику, но и научиться применять полученные знания на практике.

Содержанием практических работ является решение различных примеров и задач по дискретной математике. Состав заданий для практического занятия спланирован с расчетом, чтобы за отведенное время большинство обучающихся могли их выполнить качественно.

Выполнению практических работ предшествует проверка знаний студентов – их теоретической готовности к выполнению задания.

Во время выполнения практической работы используется индивидуальная форма организации работы обучающихся. При индивидуальной форме организации занятий каждый обучающийся самостоятельно выполняет задание согласно своему варианту.

Каждая практическая работа оформляется в тетради для практических работ. В оформление работы входит запись номера практической работы, темы, цели, задания с решением, ответов на контрольные вопросы.

Выполнение практических работ по дисциплине ЕН. 02 Дискретная математика с элементами математической логики направлено на формирование общих компетенций:

ОК 1 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам.

ОК 2 Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения задач профессиональной деятельности.

ОК 4 Работать в коллективе и команде, эффективно взаимодействовать с коллегами, руководством, клиентами.

ОК 5 Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста.

ОК 9 Использовать информационные технологии в профессиональной деятельности.

ОК 10 Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках.

Практическая работа № 1

ФОРМУЛЫ ЛОГИКИ. ПОСТРОЕНИЕ ТАБЛИЦ ИСТИННОСТИ.

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: научиться формализовывать высказывания и строить таблицы истинности для формул логики.

Для выполнения работы необходимо ***знать*** основные формулы алгебры высказываний; необходимо ***уметь*** применять логические операции, формулы логики.

ВРЕМЯ ВЫПОЛНЕНИЯ: 90 минут.

КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Формулой алгебры логики называется всякое составное высказывание, содержащее логические переменные и знаки логических операций. Для записи составного высказывания на формальном языке нужно выделить простые высказывания и логические связи между ними.

Пример 1. Записать с помощью формулы логики высказывание: неверно, что если нет дождя, то будет солнечная погода, и дождь пойдет тогда и только тогда, когда будет ветер.

Решение. Обозначим буквой А высказывание: «идет дождь», буквой В высказывание: «будет солнечная погода», буквой С высказывание: «будет ветер». Разделим составное высказывание на простые и каждое запишем с помощью формулы логики:

«нет дождя» - $\overline{A}$; «если нет дождя, то будет солнечная погода» - $\overline{A}\to B$;

«дождь пойдет тогда и только тогда, когда будет ветер» - $A \leftrightarrow C$.

Между простыми высказываниями стоит союз «и», т.е. они соединяются с помощью конъюнкции и составное высказывание «если нет дождя, то будет солнечная погода, и дождь пойдет тогда и только тогда, когда будет ветер» запишется в виде: $(\overline{A}\to B)\&(A \leftrightarrow C)$. Т.к. перед этим составным высказыванием стоит слово «неверно», то нужно поставить отрицание над всей формулой.

В итоге заданное высказывание формализуется следующим образом: $\overline{(\overline{A}\to B)\&(\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{C})}$.

Ответ: $\overline{(\overline{A}\to B)\&(\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{C})}$.

Для каждого логического выражения можно построить таблицу истинности, позволяющую определить истинность или ложность логического выражения при всех возможных комбинациях исходных значений логических переменных.

Пример 2. Построить таблицы истинности для формулы $(\overline{X}\vee X)\leftrightarrow(X\to Y\&\overline{Z})$.

Решение. Определим количество строк и столбцов в таблице. Т.к. в логическое выражение входят три переменные, то по формуле 2^3 получим 8 строк. Количество столбцов равно количеству логических переменных (3) + количество операций (6), получим 9 столбцов. Учитывая приоритет операций, расставляем порядок действий $(\overline{X}^1 \vee^2 X)\leftrightarrow^6(X\to^5 Y\&^4\overline{Z}^3)$. Заполняем таблицу:

X	Y	Z	$\overline{X}$	$\overline{X}\vee X$	$\overline{Z}$	$Y\&\overline{Z}$	$X\to Y\&\overline{Z}$	$(\overline{X}\vee X)\leftrightarrow(X\to Y\&\overline{Z})$
0	0	0	1	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	0	0	0
1	1	0	0	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	0	0	0	0

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ И ФОРМА ОТЧЕТНОСТИ

Задание 1.

В следующих высказываниях выделить простые, обозначив каждое из них буквой. Записать составное высказывание с помощью формулы логики.

I вариант	**II вариант**	**III вариант**
А) На уроке физики ученики выполняли лабораторную работу и сообщали результаты исследований учителю Б) Если светит солнце и не дует ветер, то не будет дождя С) Произведение двух чисел не равно нулю тогда и только тогда, когда одно из них не равно нулю	А) Катя любит писать сочинения или решать задачи. Б) Если дует ветер, то солнце светит тогда и только тогда, когда нет дождя С) Если в параллелограмме не все углы прямые или не все стороны равны между собой, то этот параллелограмм не прямоугольник или не ромб.	А) Если Маша сестра Саши, то Саша брат Маши Б) Погода будет солнечной тогда и только тогда, когда ни будет ни ветра, ни дождя С) Если число делится на 2 и не делится на 3, то оно не делится на 6
IV вариант	**V вариант**	**VI вариант**
А) Голова думает тогда и только тогда, когда язык отдыхает Б) Неверно, что если дует ветер и солнце светит, то нет дождя С) Если число делится на 2 и не делится на 5, то оно не делится на 10	А) Земля движется по круговой или эллиптической орбите Б) Если ветра нет, то дождь будет тогда и только тогда, когда будет пасмурная погода С) Произведение трех чисел не равно нулю тогда и только тогда, когда одно из них не равно нулю.	А) Ты можешь купить в магазине продукты, если у тебя есть деньги Б) Неверно, что если погода пасмурная, то дождь идет тогда и только тогда когда нет ветра С) Если число делится на 3 и делится на 5, то оно делится на 15.

Задание 2.

Построить таблицы истинности для формул:

I вариант	**II вариант**	**III вариант**
$\overline{x \leftrightarrow y} \vee x$	$\overline{x \to y} \& x$	$(x \& y) \to \bar{x}$
$(x \& y \vee \bar{z}) \leftrightarrow (\bar{y} \to z)$	$(x \to y \& \bar{z}) \vee \overline{(x \& y)}$	$(\bar{x} \to y) \leftrightarrow (x \vee y \& \bar{z})$
$\overline{((X \vee Y) \& (Z \leftrightarrow X))} \& (Z \vee Y)$	$(X \& Y) \& \overline{(\bar{X} \vee X)} \& (Z \leftrightarrow Y)$	$\overline{((X \vee Z) \& (Z \leftrightarrow X))} \& (Z \to Y)$
IV вариант	**V вариант**	**VI вариант**
$(\bar{x} \vee y) \leftrightarrow x$	$x \to (\overline{x \& y})$	$x \leftrightarrow (\overline{x \vee y})$
$(x \leftrightarrow \bar{y}) \& (x \to z) \vee \bar{x}$	$(\bar{x} \vee z) \to (x \vee y \& \bar{z})$	$(x \vee y \vee \bar{z}) \& (\overline{x \to y})$
$\overline{(X \vee Y)} \vee (Z \to x) \& (Z \leftrightarrow Y)$	$(X \leftrightarrow Y) \& \overline{(Z \vee D)}$	$(A \to B) \vee \bar{A} \& (C \leftrightarrow D)$

Задание 3.

С помощью таблицы истинности установить, равносильны ли следующие формулы

I вариант	**II вариант**	**III вариант**
$\overline{A \& B}$ и $A \vee B$	$\overline{B \vee A}$ и $\overline{\overline{B} \& \overline{A}}$	$A \vee \overline{B}$ и $\overline{A} \& \overline{B}$
IV вариант	**V вариант**	**VI вариант**
$\overline{A} \& B$ и $\overline{A \vee B}$	$B \vee A$ и $\overline{\overline{B} \& A}$	$A \vee B$ и $\overline{A \& \overline{B}}$

Задание 4.

Символом F обозначается одно из указанных ниже логических выражений. Дан фрагмент таблицы истинности выражения F. Какое выражение соответствует F?

Варианты I, III

X	Y	Z	F
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0

1) $\bar{X} \& Y \& \bar{Z}$
2) $X \vee \bar{Y} \vee Z$
3) $X \& \bar{Y} \& Z$
4) $\bar{X} \vee Y \vee \bar{Z}$

Вариант II, IV

X	Y	Z	F
0	0	0	0
0	1	0	1
1	1	1	1

1) $X \vee Y \vee Z$
2) $X \& Y \& \bar{Z}$
3) $\bar{X} \& Y \& \bar{Z}$
4) $X \vee \bar{Y} \vee Z$

Вариант III, V

X	Y	Z	F
0	1	1	0
1	0	0	1
0	0	1	1

1) $(X \vee \bar{Y}) \& Z$
2) $(X \& \bar{Y}) \vee Z$
3) $X \vee \bar{Y} \vee \bar{Z}$
4) $X \& \bar{Y} \& \bar{Z}$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. В чем разница между простыми и составными высказываниями?
2. Что такое таблица истинности?
3. Как определяется количество строк в таблице истинности?

Практическая работа № 2

УПРОЩЕНИЕ ФОРМУЛ ЛОГИКИ С ПОМОЩЬЮ РАВНОСИЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ. РЕШЕНИЕ ЛОГИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: научиться выполнять равносильные преобразования, используя законы логики; научиться решать логические задачи различными способами.

Для выполнения работы необходимо ***знать*** формулы алгебры высказываний, методы минимизации алгебраических преобразований; необходимо ***уметь п***рименять логические операции, формулы логики, законы алгебры логики; формулировать задачи логического характера и применять методы математической логики для их решения.

ВРЕМЯ ВЫПОЛНЕНИЯ: 90 минут

КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Для упрощения сложных формул логики используются равносильные преобразования, которые основаны на законах логики.

Законы логики

1. Закон тождества: A = A
2. Закон непротиворечия: $A \& \overline{A} = 0$
3. Закон исключенного третьего: $A \vee \overline{A} = 1$
4. Закон двойного отрицания: $\overline{\overline{A}} = A$.
5. Законы коммутативности: $AB \equiv BA$
   $A \vee B \equiv B \vee A$
6. Законы дистрибутивности: $A \vee (BC) = (A \vee B)(A \vee C)$
   $A\,(B \vee C) = AB \vee AC$

7. Ассоциативные законы: $A\vee(B\vee C) = (A\vee B)\vee C$
$A(BC) = (AB)C$
8. Законы идемпотентности: $A*A \equiv A$
$A\vee A \equiv A$
9. Законы де Моргана: $\overline{A\vee B} = \bar{A}\&\bar{B}$
$\overline{A\&B} = \bar{A}\vee\bar{B}$
10. $A\to B=\bar{A}\vee B$ (снятие импликации)
11. $A\leftrightarrow B=AB\vee\bar{A}\bar{B}$ (снятие эквиваленции)
12. Свойства констант: $A\vee 1 = 1$ $A\&1 = A$ $A\vee 0 = A$ $A\&0 = 0$

Разнообразие логических задач очень велико. Способов их решения тоже немало. Но наибольшее распространение получили следующие три способа решения логических задач: ***средствами алгебры логики с помощью равносильных преобразований; табличный; с помощью рассуждений***.

Пример 1. ***Решить задачу с помощью преобразований***
По телевизору синоптик объявляет прогноз погоды на завтра и утверждает следующее:
1) Если не будет ветра, то будет пасмурная погода без дождя.
2) Если будет дождь, то будет пасмурно и без ветра.
3) Если будет пасмурная погода, то будет дождь и не будет ветра.
Какая же погода будет завтра?
Решение. Введем обозначение для простых логических высказываний:
A – будет ветер
B – будет пасмурно
C – будет дождь
Запишем сложные высказывания, выражающие известные факты:
1) $\bar{A} \to B\bar{C}$
2) $C\to B\bar{A}$
3) $B \to C\bar{A}$
Запишем произведение сложных высказываний и упростим его:
$(\bar{A} \to B\bar{C})\&(C\to B\bar{A})\&(B \to C\bar{A}) = (A \vee B\bar{C})\&(\bar{C} \vee B\bar{A})\&(\bar{B} \vee C\bar{A}) =$
$= (A\bar{C} \vee AB\bar{A} \vee B\bar{C}\bar{C} \vee B\bar{C}BA) \&(\bar{B} \vee C\bar{A}) = (A\bar{C} \vee B\bar{C}\vee B\bar{C}A) \&(\bar{B} \vee C\bar{A}) =$
$= (A\bar{C} \vee B\bar{C}(1\vee A)) \&(\bar{B} \vee C\bar{A}) = (A\bar{C} \vee B\bar{C}) \&(\bar{B} \vee C\bar{A})) = A\bar{C}\bar{B} \vee A\bar{C}C\bar{A} \vee B\bar{C}\bar{B}\vee B\bar{C}C\bar{A} = A\bar{C}\bar{B}$
Ответ: будет ветер, не будет дождя и будет не пасмурно □

Пример 2. ***Решить задачу с помощью преобразований***
Трое друзей, болельщиков автогонок "Формула-1", спорили о результатах предстоящего этапа гонок.
1) Вот увидишь, Шумахер не придет первым, — сказал Джон. Первым будет Хилл.
2) Да нет же, победителем будет, как всегда, Шумахер, — воскликнул Ник. — А об Алези и говорить нечего, ему не быть первым.
3) Питер, к которому обратился Ник, возмутился: Хиллу не видать первого места

По завершении этапа гонок оказалось, что каждое из предположений двоих друзей подтвердилось, а предположения третьего из друзей оказались неверны. Кто выиграл этап гонки?
Решение. Введем обозначения для логических высказываний:
A — победит Шумахер; B — победит Хилл; C — победит Алези.
Запишем сложные высказывания, выражающие известные факты:
1. $\bar{A}B$
2. $A\bar{C}$
3. $\bar{B}$
Возможные три случая:

Прав Джон и Ник, Питер не прав: $\overline{(\bar{A}}BA\bar{C})\bar{\bar{\bar{B}}}$ = 0 (должно быть 1)

Прав Питер и Джон, Ник не прав: $(\bar{A}B\bar{B})\overline{A\bar{C}}$ = 0 (должно быть 1)

Прав Питер и Ник, Джон не прав:

$(A\bar{C}\bar{B})\overline{\bar{A}B} = (A\bar{C}\bar{B})(A \vee \bar{B}) = A\bar{C}\bar{B} \vee A\bar{C}\bar{B} = A\bar{C}\bar{B} = 1$

Ответ: А – победит Шумахер; Хилл и Алези не победят

Пример 3. ***Решить задачу табличным способом***

Три дочери писательницы Дорис Кей — Джуди, Айрис и Линда, тоже очень талантливы. Они приобрели известность в разных видах искусств — пении, балете и кино. Все они живут в разных городах, поэтому Дорис часто звонит им в Париж, Рим и Чикаго.

Известно, что:

1. Джуди живет не в Париже, а Линда — не в Риме;
2. парижанка не снимается в кино;
3. та, кто живет в Риме, певица;
4. Линда равнодушна к балету.

Где живет Айрис, и какова ее профессия?

Решение. Составим таблицу и отразим в ней условия 1 и 4, заполнив клетки цифрами 0 и 1 в зависимости от того, ложно или истинно соответствующее высказывание:

Париж	Рим	Чикаго		Пение	Балет	Кино
0			Джуди			
			Айрис			
	0		Линда		0	

Так как Линда живет не в Риме, то, согласно условию 3, она не певица. В клетку, соответствующую строке "Линда" и столбцу "Пение", ставим 0. Из таблицы сразу видно, что Линда киноактриса, а Джуди и Айрис не снимаются в кино.

Париж	Рим	Чикаго		Пение	Балет	Кино
0			Джуди			0
			Айрис			0
	0		Линда	0	0	1

Согласно условию 2, парижанка не снимается в кино, следовательно, Линда живет не в Париже. Но она живет и не в Риме. Следовательно, Линда живет в Чикаго. Так как Линда и Джуди живут не в Париже, там живет Айрис. Джуди живет в Риме и, согласно условию 3, является певицей. А так как Линда киноактриса, то Айрис балерина.

В результате постепенного заполнения получаем следующую таблицу:

Париж	Рим	Чикаго		Пение	Балет	Кино
0	0	1	Джуди	1	0	0
1	0	0	Айрис	0	1	0
0	0	1	Линда	0	0	1

Ответ. Айрис балерина, живет в Париже.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ И ФОРМА ОТЧЕТНОСТИ

Задание 1. С помощью равносильных преобразований упростить формулы логики

I вариант	**II вариант**	**III вариант**	**IV вариант**
1) $\bar{x} \vee x \vee y \vee xy$ 2) $(\overline{x \vee y} \to x \vee y)(y \vee \overline{x})$	1) $\bar{x} \vee \overline{xy\bar{y}}$ 2) $((x \vee y) \to z)(x \vee z)z$	1) $x \vee \overline{xy} \vee \overline{\bar{x} \vee y}$ 2) $\overline{(x \vee y) \to (\overline{x \to y})}$	1) $\overline{\bar{x}\bar{y}} \vee \bar{x}$ 2) $(x \to y\bar{z})(z \to xy)z$

Задание 2. Решить логические задачи с помощью преобразований

I вариант

Задача 1. Кто играет в шахматы? Определите, кто из трёх мальчиков Александр, Борис и Сергей играет в шахматы, если известно:

1) играет Александр или Борис;
2) если играет Александр, то играет и Борис;
3) Александр и Сергей оба играют или оба не играют.

Задача 2. Три ученика, Саша, Коля и Вова, прогуляли информатику. Когда их спросили, кому пришла в голову эта идея, они ответили следующее:

1) Саша: «Я никогда не призывал к прогулу, это была идея Коли».
2) Коля: «Я никогда не предложил бы это первым, во всем виноват Вова».
3) Вова: «Эта идея пришла в голову Коле. Я просто пошел за компанию».

Внутренним чутьем учитель почувствовал, что два ученика говорят правду, а третий – лжет. Кто из учеников был инициатором прогула?

II вариант

Задача 1. Компьютер вышел из строя. Известно, что:

1) Если монитор неисправен, то исправна видеокарта, но несправна оперативная память.
2) Если видеокарта исправна, то исправна оперативная память, но неисправен монитор.
3) Если оперативная память исправна, то исправна видеокарта, но неисправен монитор.

Что неисправно в компьютере?

Задача 2. Три школьника, Миша, Коля и Сергей, остававшиеся в классе на перемене, были вызваны к директору по поводу разбитого в это время окна в кабинете. На вопрос директора о том, кто это сделал, мальчики ответили следующее:

1) Миша: «Я не бил окно, и Коля тоже…»
2) Коля: «Миша не разбивал окно, это Сергей разбил футбольным мячом!»
3) Сергей: «Я не делал этого, стекло разбил Миша».

Стало известно, что двое ребят сказали правду, а третий оба факта соврал. Зная это, директор смог докопаться до истины. Кто разбил стекло в классе?

III вариант

Задача 1. Кто из учеников идет на олимпиаду по физике, если известно следующее:

1) Если Миша идет, то идет Аня, но не идет Маша.
2) Если Маша не идет на олимпиаду, то идет Аня, но не идет Миша.
3) Если Аня идет, то идет Миша, но не идет Маша.

Задача 2. Один из 3 братьев: Алеша, Витя и Семен поставил на скатерть кляксу. Кто запачкал скатерть? - спросила бабушка.

1) Витя не ставил кляксу, - сказал Алеша, - Это сделал Семен.
2) Это Витя поставил кляксу, - сказал Семен, - А Алеша не пачкал скатерть.
3) Я знаю, что Семен не мог этого сделать. - сказал Витя.

Оказалось, что двое мальчиков сказали правду, а один сказал неправду. Кто поставил на скатерть кляксу?

IV вариант

Задача 1. Определите, кто из подозреваемых участвовал в преступлении, если известно:

1) если Иванов не участвовал или Петров участвовал, то Сидоров участвовал;
2) если Иванов не участвовал, то Сидоров не участвовал.

Задача 2. Аня, Вика и Сергей решили пойти в кино. Учитель, хорошо знавший ребят, высказал предположения:

1) Аня пойдет в кино, а Вика останется дома;
2) Сергей пойдет в кино, но Аня не пойдет;
3) Сергей не пойдет в кино и Вика не пойдет в кино.

Когда ребята пошли в кино, оказалось, что учитель немного ошибся: из трех его утверждений истинным оказались только два. Кто из ребят пошел в кино?

Задание 3. Решить табличным способом

I вариант

Задача 1. Воронов, Павлов, Левицкий и Сахаров — 4 талантливых молодых человека. Один из них — танцор, другой — художник, третий — певец, а четвертый — писатель. О них известно следующее:

1) Воронов и Левицкий сидели в зале консерватории в тот вечер, когда певец дебютировал в сольном концерте.
2) Павлов и писатель вместе позировали художнику.
3) Писатель написал биографическую повесть о Сахарове и собирается написать о Воронове.
4) Воронов никогда не слышал о Левицком.

Задача 2. Марина, Валерия, Анна и Дарья - подруги детства. Они умеют играть на разных инструментах (пианино, гитаре, арфе и скрипке), но каждая только на одном. Они же знают иностранные языки, но каждая только один. Известно еще вот что:

1) Анна не играет на скрипке, но знает французский язык.
2) Валерия не знает английского языка и не играет ни на арфе, ни на скрипке.
3) Девушка , которая говорит по-немецки, не играет на арфе.
4) Марина не знает ни английского, ни немецкого и не играет ни на скрипке, ни на арфе.
5) Девушка, которая играет на гитаре, говорит по-итальянски.

На каком языке говорит, и на каком инструменте играет каждая девочка?

II вариант

Задача 1. Атос, Портос, Арамис и Д’Артаньян – четыре талантливых молодых мушкетёра. Один из них лучше всех сражается на шпагах, другой не имеет равных в рукопашном бою, третий лучше всех танцует на балах, четвертый без промаха стреляет с пистолетов. О них известно следующее:

1) Атос и Арамис наблюдали на балу за их другом – прекрасным танцором.
2) Портос и лучший стрелок вчера с восхищением следили за боем рукопашника.
3) Стрелок хочет пригласить в гости Атоса.
4) Портос был очень большой комплекции, поэтому танцы были не его стихией.

Кто чем занимается?

Задача 2. Жили-были на свете три поросёнка, три брата: Ниф-Ниф, Наф-Наф, Нуф-Нуф. Построили они три домика: соломенный, деревянный и кирпичный. Все три брата выращивали возле своих домиков цветы: розы, ромашки и тюльпаны. Известно, что:

1) Ниф-Ниф живет не в соломенном домике, а Наф-Наф – не в деревянном;
2) возле соломенного домика растут не розы, а тот, у кого деревянный домик, выращивает ромашки.
3) У Наф-Наф аллергия на тюльпаны, поэтому он не выращивает их.

Узнайте, кто в каком домике живет, и какие цветы выращивает.

III вариант

Задача 1. «Город мастеров». В нашем городе живут 5 друзей: Иванов, Петров, Сидорчук, Веселов и Гришин. У них разные профессии: маляр, мельник, парикмахер, почтальон, плотник. Но я точно знаю, что:

1) Петров и Гришин никогда не держали в руках малярной кисти
2) Иванов и Гришин давно собираются посетить мельницу, где работает их товарищ.
3) Петров и Веселов живут в одном доме с почтальоном.
4) Сидорчук недавно был в загсе одним из свидетелей, когда Петров и дочка парикмахера сочетались законным браком
5) Иванов и Петров каждое воскресенье играют в городки с плотником и маляром

6) Гришин и Веселов по субботам встречаются в парикмахерской, где работает их друг.
7) Почтальон же предпочитает бриться дома.

Помогите мне установить профессию каждого из друзей.

Задача 2. Три товарища, Иван, Дмитрий и Степан преподают различные предметы в школах Москвы, Санкт-Петербурга и Киева. Известно, что:

1) Иван работает не в Москве, а Дмитрий не в Ленинграде;
2) Москвич преподает не физику;
3) Тот, кто работает в Ленинграде, преподает химию;
4) Дмитрий преподает не биологию.

Какой предмет, и в каком городе преподает каждый товарищ?

IV вариант

Задача 1. В авиационном подразделении служат Потапов, Щедрин, Семенов, Коновалов и Самойлов. Их специальности: пилот, штурман, бортмеханик, радист и синоптик. Об этих людях известно следующее:

1) Щедрин и Коновалов не умеют управлять самолетом.
2) Потапов и Коновалов пока не штурманы.
3) Щедрин и Самойлов живут в одном доме с радистом.
4) Семенов был в доме отдыха вместе со Щедриным и сыном синоптика.
5) Потапов и Щедрин в свободное время любят играть в шахматы с бортмехаником.
6) Коновалов, Семенов и синоптик увлекаются боксом.
7) Радист боксом не увлекается.

Кто какой профессии?

Задача 2. Маша, Женя, Лида и Катя умеют играть на различных инструментах (виолончели, рояле, гитаре и скрипке). Они же владеют различными иностранными языками (английским, французским, немецким, испанским), но каждая только одним. Известно, что:

1) девушка, которая играет на гитаре, говорит по-испански.
2) Лида не играет ни на скрипке, ни на виолончели и не знает английского языка.
3) Маша не играет ни на скрипке, ни на виолончели и не знает английского языка.
4) Девушка, которая говорит по-немецки, не умеет играть на виолончели,
5) Женя знает французский язык, но не умеет играть на скрипке.

Кто же из девушек, какой язык знает, и на каком инструменте играет?

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие законы логики Вы использовали при упрощении формул логики?
2. Методом рассуждений решите задачу. Сегодня не воскресенье, а завтра не среда. Вчера была не пятница, а позавчера был не понедельник. Завтра не воскресенье, и вчера было не воскресенье. Послезавтра не суббота и не воскресенье. Вчера был не понедельник, и не среда. Позавчера была не среда, а завтра не вторник. Да, и сегодня не среда. Какой же сегодня день недели, если учесть, что одно утверждение в списке - ложно?

Практическая работа № 3

ПРИВЕДЕНИЕ ФОРМУЛ ЛОГИКИ К ДНФ, КНФ. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ БУЛЕВОЙ ФУНКЦИИ В ВИДЕ СДНФ И СКНФ

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: научиться представлять булевы функции в виде СДНФ и СКНФ; научиться строить логические схемы, реализующие булевы функции.

Для выполнения работы необходимо ***знать*** основные формулы алгебры высказываний, методы минимизации алгебраических преобразований; необходимо ***уметь*** применять логические операции, формулы логики, законы алгебры логики; формулировать задачи логического характера и применять методы математической логики для их решения.

ВРЕМЯ ВЫПОЛНЕНИЯ: 90 минут.

КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

С помощью равносильных преобразований формулу логики можно привести к дизъюнктивной или конъюнктивной нормальной форме (ДНФ и КНФ).

Дизъюнктивной нормальной формой называется дизъюнкция простых конъюнкций.

Пример 1. Привести к ДНФ формулу $(X\to Y)\&(Y\to Z)$.

Решение

1. избавляемся от импликации в скобках;
2. раскрываем скобки, пользуясь законом дистрибутивности;
3. упрощаем выражение, пользуясь законом непротиворечия ($Y\,\bar{\mathbf{Y}} = 0$) и законом константы для нуля ($X\vee 0=X$).

$(X\to Y)\&(Y\to Z) = (\bar{\boldsymbol{X}}\vee Y)\&(\bar{\boldsymbol{Y}}\vee Z) = \bar{\boldsymbol{X}}\bar{\boldsymbol{Y}} \vee\bar{\boldsymbol{X}}Z \vee Y\,\bar{\boldsymbol{Y}}\vee Y\,Z =$ $\underline{\bar{\boldsymbol{X}}\bar{\boldsymbol{Y}} \vee\bar{\boldsymbol{X}}\mathbf{Z} \vee \mathbf{Y\,Z}}$

Ответ: $(X\to Y)\&(Y\to Z) = \bar{\boldsymbol{X}}\bar{\boldsymbol{Y}} \vee\bar{\boldsymbol{X}}Z \vee YZ$.

Конъюнктивной нормальной формой называется конъюнкция простых дизъюнкций.

Пример 2. Привести к КНФ формулу $(X\to Y)((\bar{Y}\to Z)\to\bar{X})$

Решение

1. избавляемся от импликации в скобках;
2. во второй скобке используем закон де Моргана $\overline{\mathbf{Y}\vee\mathbf{Z}} = \bar{\mathbf{Y}}\&\bar{\mathbf{Z}}$ и далее закон дистрибутивности.

$(X\to Y)((\bar{Y}\to Z)\to\bar{X}) = (\bar{X}\vee Y)(\overline{Y\vee Z}\vee\bar{X}) = (\bar{X}\vee Y)((\bar{Y}\&\bar{Z})\vee\bar{X}) =$ $\underline{\mathbf{(\bar{\boldsymbol{X}}\vee Y)\&(\bar{\boldsymbol{Y}}\vee\bar{\boldsymbol{X}})\ \&(\bar{\boldsymbol{Z}}\vee\bar{\boldsymbol{X}})}}$

Ответ: $(X\to Y)((\bar{Y}\to Z)\to\bar{X}) = (\bar{X}\vee Y)\&(\bar{Y}\vee\bar{X})\ \&(\bar{Z}\vee\bar{X})$.

Нормальная форма называется **совершенной**, если в каждой ее элементарной дизъюнкции (конъюнкции) представлены все переменные, входящие в данную функцию (либо сами, либо с отрицанием).

Пример 3. Найти СДНФ для булевой функции: $F(x,y,z) = (x\leftrightarrow y)\vee(y\leftrightarrow z)$ аналитическим способом и с помощью таблицы истинности.

Решение

а) С помощью законов логики заменим эквиваленцию дизъюнкцией и отрицанием, приведем булеву функцию к ДНФ.

$F(x,y,z) = (x\leftrightarrow y)\vee(y\leftrightarrow z) = (xy\vee\bar{x}\bar{y})\vee(yz\vee\bar{y}\bar{z}) = xy\vee\bar{x}\bar{y}\vee yz\vee\bar{y}\bar{z}$.

Т.к. в каждом слагаемом не хватает по одной переменной, умножим каждое слагаемое на 1, и затем представим 1 в виде: $1 = a\vee\bar{a}$ (вместо *a* необходимо записать недостающую переменную)

$F(x,y,z) = xy1\vee\bar{x}\bar{y}1\vee yz1\vee\bar{y}\bar{z}1=xy(z\vee\bar{z})\vee\bar{x}\bar{y}(z\vee\bar{z})\vee yz(x\vee\bar{x})\vee\bar{y}\bar{z}(x\vee\bar{x})=\underline{xyz}\vee xy\bar{z}\vee\bar{x}\bar{y}z\vee\bar{x}\bar{y}\bar{z}\vee\underline{yzx}\vee yz\bar{x}\vee$ $\vee\bar{y}\bar{z}x\vee\bar{y}\bar{z}\bar{x} = \mathbf{xyz\vee xy\bar{z}\vee\bar{x}\bar{y}z\vee yz\bar{x}\vee\bar{y}\bar{z}x\vee\bar{y}\bar{z}\bar{x}}$

б) Построим таблицу истинности для функции $F(x,y,z) = (x\leftrightarrow y)\vee(y\leftrightarrow z)$.

x	y	z	$x\leftrightarrow y$	$y\leftrightarrow z$	$(x\leftrightarrow y)\vee(y\leftrightarrow z)$
0	0	0	1	1	**1**
0	0	1	1	0	**1**
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	**1**
1	0	0	0	1	**1**
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	0	**1**
1	1	1	1	1	**1**

В последнем столбце выделим наборы, для которых значение функции истинно и для каждого набора построим элементарные конъюнкции, причем каждой переменной x_k=1 будет соответствовать x_k, а каждой x_k=0 будет соответствовать $\bar{x}_k$. Далее составляем дизъюнкции построенных элементарных конъюнкций.

$F(x,y,z) = xyz \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}\bar{z} \vee xy\bar{z} \vee \bar{y}\bar{z}\bar{x}$

Ответ: СДНФ $F(x,y,z) = xyz \vee xy\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee yz\bar{x} \vee \bar{y}\bar{z}x \vee \bar{y}\bar{z}\bar{x}$

Пример 4. Найти СКНФ для булевой функции: $F(x,y,z) = (x \vee y)(z \to x)$ аналитическим способом и с помощью таблицы истинности.

Решение.

а) С помощью законов логики заменим импликацию дизъюнкцией и отрицанием и приведем булеву функцию к КНФ.

$F(x,y,z) = (x \vee y)(z \to x) = (x \vee y)(\bar{z} \vee x)$.

Т.к. в каждом слагаемом не хватает по одной переменной, прибавим к каждому слагаемое 0, и затем представим 0 в виде: $0 = a\bar{a}$ (вместо *а* необходимо записать недостающую переменную)

$F(x,y,z) = (x \vee y \vee 0)(\bar{z} \vee x \vee 0) = (x \vee y \vee z\bar{z})(\bar{z} \vee x \vee y\bar{y}) = (x \vee y \vee z)\underline{(x \vee y \vee \bar{z})}\ \underline{(\bar{z} \vee x \vee y)}(\bar{z} \vee x \vee \bar{y}) = (x \vee y \vee z)(\bar{z} \vee x \vee y)(\bar{z} \vee x \vee \bar{y})$.

б) Построим таблицу истинности для функции $F(x,y,z) = (x \vee y)(z \to x)$.

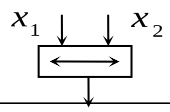
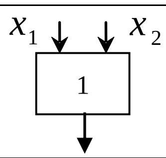
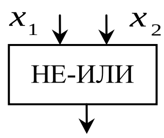
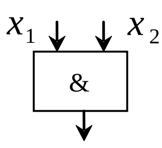
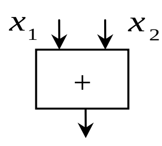
x	y	z	$x \vee y$	$z \to x$	$(x \vee y)(z \to x)$
0	0	0	0	1	**0**
0	0	1	0	0	**0**
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	**0**
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

В последнем столбце выделим наборы, для которых значение функции ложно и для каждого набора построим элементарные дизъюнкции, причем каждой переменной x_k=1 будет соответствовать $\bar{x}_k$, а каждой x_k=0 будет соответствовать x_k. Далее составляем конъюкнции построенных элементарных дизъюнкций.

$F(x,y,z) = (x \vee y \vee z)(\bar{z} \vee x \vee y)(\bar{z} \vee x \vee \bar{y})$

Ответ: СКНФ: $F(x,y,z) = (x \vee y \vee z)(\bar{z} \vee x \vee y)(\bar{z} \vee x \vee \bar{y})$

Устройства, реализующие элементарные булевые функции, называются **логическими элементами**. Логические элементы изображаются в виде прямоугольников, внутри которых помещаются условные названия или символы соответствующих функций:

Функция	Графическое изображение	Функция	Графическое изображение
$\bar{x}$		$x_1 \Leftrightarrow x_2$	
$x_1 \vee x_2$		$x_1 \mid x_2$	
$x_1 x_2$		$x_1 \oplus x_2$	

Из данных логических элементов путем соединения входа одного из них с выходом другого можно строить сложные логические схемы.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ И ФОРМА ОТЧЕТНОСТИ

Задание 1.

1) Найти ДНФ для данной булевой функции.
2) Найти СДНФ для данной булевой функции аналитическим способом.
3) Найти СДНФ для данной булевой функции с помощью таблицы истинности.

I вариант	$F(x,y,z) = (\bar{x}y \to yz) \vee (y \leftrightarrow z)$
II вариант	$F(x,y,z) = (\overline{xy} \to xz) \vee (\bar{y} \leftrightarrow z)$
III вариант	$F(x,y,z) = (\bar{x} \leftrightarrow y) \vee (xy \to yz)$
IV вариант	$F(x,y,z) = (\bar{y}z \to \bar{x}y) \vee (x \leftrightarrow z)$

Задание 2.

1) Найти КНФ для данной булевой функции.
2) Найти СКНФ для данной булевой функции аналитическим способом.
3) Найти СКНФ для данной булевой функции с помощью таблицы истинности.

I вариант	$F(x,y,z) = (\bar{x} \to z\bar{y})(\bar{y} \vee x)$
II вариант	$F(x,y,z) = (\bar{x} \vee z)(y \to zx)$
III вариант	$F(x,y,z) = (\bar{y} \to x)(x \vee zy)$
IV вариант	$F(x,y,z) = (x \vee y)(x \to z\bar{y})$

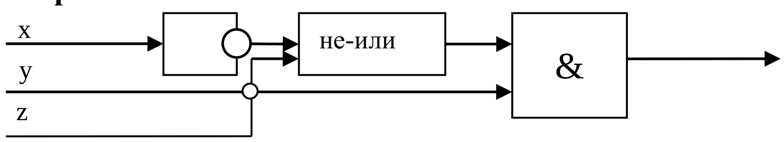
Задание 3. Для данной булевой функции построить логическую схему

I вариант	$F(x,y,z) = (x \vee y)(\bar{x} \oplus z)$
II вариант	$F(x,y,z) = (\bar{x} \& y) \vee \overline{(x\,|}\ z)$
III вариант	$F(x,y,z) =(\bar{y} \vee x)(\bar{x} \oplus z)$
IV вариант	$F(x,y,z) = (x \& \bar{y}) \vee \overline{(y\,|}\ z)$

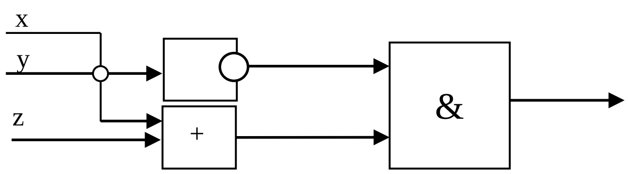
Задание 4.

По заданной логической схеме построить булеву функцию и составить ее таблицу истинности:

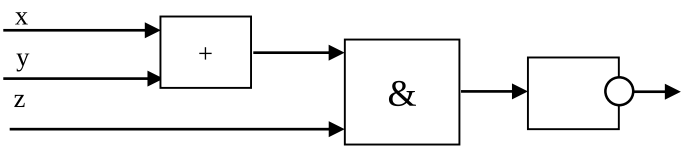
I вариант



II вариант



III вариант



IV вариант

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие законы логики применяются для ввода недостающих переменных при представлении булевой функции в виде СДНФ и СКНФ?
2. Приведите примеры логических схем, используемых в ЭВМ.

Практическая работа № 4

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ БУЛЕВОЙ ФУНКЦИИ В ВИДЕ МИНИМАЛЬНОЙ ДНФ И КНФ

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: научиться минимизировать булевы функции с помощью равносильных преобразований и графическим методом карт Карно.

Для выполнения работы необходимо ***знать*** основные формулы алгебры высказываний, методы минимизации алгебраических преобразований; необходимо ***уметь*** применять логические операции, формулы логики, законы алгебры логики, формулировать задачи логического характера и применять методы математической логики для их решения.

ВРЕМЯ ВЫПОЛНЕНИЯ: 90 минут.

КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Нормальная форма называется ***минимальной***, если она включает минимальное число символов по сравнению со всеми другими эквивалентными ей нормальными формами.

Минимальная нормальная форма получается из СДНФ (СКНФ) удалением некоторых элементарных конъюнкций (дизъюнкций). ***Тупиковой нормальной формой*** называется ДНФ (КНФ), из которой нельзя удалить ни одной элементарной конъюнкции (дизъюнкции) так, чтобы сохранить булеву функцию неизменной

Пример 1. Пусть булева функция задана таблицей истинности.

а) составить СДНФ для данной функции; б) минимизировать СДНФ; в) построить логическую схему, реализующую данную функцию.

x	y	z	F(x,y,z)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	**1**
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	**1**
1	1	1	**1**

Решение.

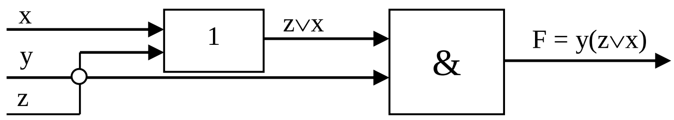
а) Найдем элементарные конъюнкции и составим СДНФ:

$F(x,y,z) = \bar{x}yz \vee xy\bar{z} \vee xyz$

б) Минимизируем СДНФ с помощью равносильных преобразований:

$F(x,y,z) = \bar{x}yz \vee xy\bar{z} \vee xyz = (\bar{x}yz \vee xyz) \vee xy\bar{z} = yz(\bar{x} \vee x) \vee xy\bar{z} = yz \vee xy\bar{z} = y(z \vee x\bar{z}) = y(z \vee x)(z \vee \bar{z}) = y(z \vee x)$

в) Данную функцию реализует следующая логическая схема:



Одним из наиболее удобных способов минимизации булевых функций является графический метод карт Карно. **Карты Карно** – это таблицы, состоящие из 2^n клеток (n – количество переменных). В каждой клетке находится двоичное значение (0 или 1) булевой функции из таблицы истинности или из СДНФ.

При n = 3 карты Карно имеют вид таблицы с $2^3 = 8$ клетками:

	$\bar{x}\bar{y}$ 00	$\bar{x}y$ 10	xy 11	$x\bar{y}$ 01
z 1				
$\bar{z}$ 0				

При n = 4 карты Карно имеют вид таблицы с $2^4 = 16$ клетками.

	$\bar{z}\bar{d}$	$\bar{z}$d	zd	z$\bar{d}$
$\bar{x}\bar{y}$				
$\bar{x}y$				
xy				
$x\bar{y}$				

Пример 2. Дана функция F(x,y,z) = $\bar{x}$y$\bar{z}$∨$\bar{x}$yz∨xy$\bar{z}$∨xyz. Построить минимальную нормальную форму данной функции.

Решение

1 способ: с помощью равносильных преобразований

F(x,y,z) = $\bar{x}$y$\bar{z}$∨$\bar{x}$yz∨xy$\bar{z}$∨xyz = ($\bar{x}$y$\bar{z}$∨$\bar{x}$yz)∨(xy$\bar{z}$∨xyz) = $\bar{x}$y($\bar{z}$∨z) ∨ xy($\bar{z}$∨z) = $\bar{x}$y ∨ xy = y($\bar{x}$ ∨ x) = y

2 способ: с помощью карт Карно

1. Функция задана в виде СДНФ. Нанесем единицы на карту Карно (единицы соответствуют слагаемым в СДНФ):

	$\bar{x}\bar{y}$ 00	$\bar{x}y$ 10	xy 11	$x\bar{y}$ 01
z 1	0	1	1	0
$\bar{z}$ 0	0	1	1	0

2. Обведем единицы попарно двумя контурами.
3. В первом контуре не меняются переменные $\bar{x}y$, во втором – переменные xy.
4. Объединим получившиеся конъюнкции дизъюнкцией: **F(x,y,z) = $\bar{x}y$∨xy = y**.

В этой задаче можно рассмотреть весь квадрат из четырех единиц:

	$\bar{x}\bar{y}$ 00	$\bar{x}y$ 10	xy 11	$x\bar{y}$ 01
z 1	0	1	1	0
$\bar{z}$ 0	0	1	1	0

В этом квадрате для всех единиц неизменной остается только переменная y, следовательно, **F(x,y,z) = y**.

Ответ: минимальная нормальная форма: **F(x,y,z) = y**.

Пример 3. Построить минимальную форму для булевой функции, заданной таблично.

x	y	z	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Решение

1. Нанесем на карту Карно единицы в соответствии со значениями последнего столбца таблицы:

	$\bar{x}\bar{y}$ 00	$\bar{x}y$ 10	xy 11	$x\bar{y}$ 01
z 1			1	
$\bar{z}$ 0	1	1	1	1

2. Обведем единицы в два контура.
3. В первом контуре, состоящем из четырех единиц не меняется переменная z, во втором – переменные xy.
4. Объединим получившиеся результаты дизъюнкцией: **F(x,y,z) = z∨xy**.

Ответ: F(x,y,z) = z∨xy.

Кроме рассмотренных методов минимизации существуют также метод Куайна, метод диаграмм Вейча. Минимальную нормальную форму удобно использовать при построении логических схем.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ И ФОРМА ОТЧЕТНОСТИ

Задание 1. Привести СДНФ к минимальной двумя способами: а) с помощью равносильных преобразований; б) с помощью карт Карно.

I вариант	**II вариант**
F(x,y,z) = $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$∨$x\bar{y}\bar{z}$∨x$\bar{y}$z∨xyz	F(x,y,z) = $\bar{x}\bar{y}z$∨$x\bar{y}\bar{z}$∨x$\bar{y}$z∨xy$\bar{z}$
III вариант	**IV вариант**
F(x,y,z) = $\bar{x}\bar{y}z$∨$\bar{x}y\bar{z}$∨x$\bar{y}$z∨xy$\bar{z}$	F(x,y,z) = $\bar{x}\bar{y}z$∨$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$∨$\bar{x}y$z∨x$\bar{y}\bar{z}$

Задание 2.

Для данной булевой функции а) составить СДНФ; б) минимизировать СДНФ с помощью равносильных преобразований и карт Карно; в) построить логическую схему, реализующую функцию.

I вариант	**II вариант**	**III вариант**	**IV вариант**
F(x,y,z) = (11001000)	F(x,y,z) = (01010100)	F(x,y,z) = (11000100)	F(x,y,z) = (00110010)

Задание 3. Постройте минимальную форму для функции, выраженной картой Карно.

I вариант

	$\bar{z}\bar{d}$	$\bar{z}$d	zd	z$\bar{d}$
$\bar{x}\bar{y}$	1			1
$\bar{x}y$		1	1	1
1xy				
$x\bar{y}$	1		1	1

II вариант

	$\bar{z}\bar{d}$	$\bar{z}$d	zd	z$\bar{d}$
$\bar{x}\bar{y}$		1	1	
$\bar{x}y$		1	1	1
1xy				1
$x\bar{y}$		1	1	

III вариант

	$\bar{z}\bar{d}$	$\bar{z}$d	zd	z$\bar{d}$
$\bar{x}\bar{y}$	1	1		1
$\bar{x}y$	1	1		
1xy				
$x\bar{y}$		1	1	1

IV вариант

	$\bar{z}\bar{d}$	$\bar{z}$d	zd	z$\bar{d}$
$\bar{x}\bar{y}$	1	1		1
$\bar{x}y$			1	1
1xy	1			
$x\bar{y}$	1	1		

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие еще существуют методы минимизации булевых функций?
2. Почему при построении логических схем удобнее использовать минимальную форму булевой функции?

Практическая работа № 5

ПРОВЕРКА БУЛЕВОЙ ФУНКЦИИ НА ПРИНАДЛЕЖНОСТЬ К КЛАССАМ T0, T1, S, L, M. ПОЛНОТА МНОЖЕСТВ

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: научиться проверять булеву функцию на принадлежность к основным замкнутым классам.

Для выполнения работы необходимо ***знать*** основные принципы математической логики; необходимо ***уметь*** применять логические операции, формулы логики, законы алгебры логики, формулировать задачи логического характера и применять методы математической логики для их решения.

ВРЕМЯ ВЫПОЛНЕНИЯ: 90 минут.

КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Класс функций называется **функционально замкнутым**, если любая суперпозиция функций этого класса принадлежит этому же классу.

Функционально замкнутые классы булевых функций (классы Поста):

1. Класс функций, сохраняющих константу 0 – $\mathbf{T_0}$ = {f|f(00..0) = 0}: функции, для которых выполняется f(00..0) = 0.

2. Класс функций, сохраняющих константу 1 – $\mathbf{T_1}$ = {f|f(11..1) = 1}: функции, для которых выполняется f(11..1) = 1.

3. Класс самодвойственных функций **S**.

Функция f называется самодвойственной, если f = f* (f* - двойственная функция по отношению к f).

4. Класс линейных функций – **L**.

Булева функция называется линейной, если ее полином Жегалкина имеет вид многочлена первой степени.

$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_0 \oplus c_1x_1 \oplus c_2x_2 \oplus \ldots \oplus c_nx_n$

5. Класс монотонных функций – **M**.

Аргумент $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется предшествующим аргументу $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ (обозначение $x \le y$), если $\forall i$ выполнено $x_i \le y_i$.

Функция называется монотонной, если для любых двух элементов x, y, сравнимых между собой, из $x \le y$ следует $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le f(y_1, y_2, \ldots, y_n)$

Пример 1. Проверить принадлежность булевой функции $f(x_1, x_2, x_3) = (0, 2, 5, 7)$ пяти классам Поста

Решение

1. Перейдем от номеров носителей к самому носителю $f(x_1, x_2, x_3) = (000, 010, 101, 111)$.

m	x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

2. Проверим принадлежность классу T_0.

Вычислим f(000): f(000) = 1, поэтому f не сохраняет 0 и не принадлежит классу T_0.

3. Проверим принадлежность классу T_1.

Вычислим f(111): f(111) = 1, поэтому f сохраняет 1 и принадлежит классу T_1.

4. Проверим принадлежность классу S.

Вычислим двойственную функцию: вектор-столбец значений исходной булевой функции имеет вид: $f(x_1, x_2, x_3) = [10100101]^T$.

Беря отрицание каждого элемента, получим столбец значений двойственной функции:

$f^*(x_1, x_2, x_3) = [01011010]^T$.

Поскольку $f \ne f^*$, то функция f не принадлежит к классу S.

5. Проверим принадлежность классу L.

Найдем полином Жегалкина

а) добавим к таблице истинности столбец «треугольника Паскаля» и заполним его согласно следующему правилу:

- в нулевую строку выпишем транспонированный вектор-столбец значений;
- элементы последующих строк получаются последовательным сложением по модулю 2 двух вышестоящих чисел предыдущей строки;
- добавим столбец «Слагаемые»;
- определим вектор-столбец λ, состоящий из лидеров каждой строки треугольника; выделим слагаемые с лидером 1;
- сложив по модулю 2 выделенные слагаемые, получим многочлен Жегалкина $f(x_1,x_2,x_3) = 1\oplus x_1\oplus x_3$

m	x_1	x_2	x_3	f	Треугольник Паскаля								Слагаемые
0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1

1	0	0	1	0		1	1	1	0	1	1	1	x_3
2	0	1	0	1			0	0	1	1	0	0	x_2
3	0	1	1	0				0	1	0	1	0	x_2x_3
4	1	0	0	0					1	1	1	1	x_1
5	1	0	1	1						0	0	0	x_1x_3
6	1	1	0	0							0	0	x_1x_2
7	1	1	1	1								0	$x_1x_2x_3$

Т.к. найденный многочлен Жегалкина имеет вид многочлена первой степени, то функция f принадлежит классу L.

6. Проверим принадлежность классу M.

Найдем минимальную дизъюнктивную форму с помощью карт Карно: f = $\overline{x_1} \cdot \overline{x_3} \vee x_1 x_3$

	$\overline{x_1}x_2$	x_1x_2	$x_1\overline{x_2}$	$\overline{x_1}\,\overline{x_2}$
x_3		1	1	
$\overline{x_3}$	1			1

Т.к. минимальная ДНФ содержит отрицания, то, согласно критерию монотонности, она не является монотонной.

Например, 000 ≤ 100, но при этом 1 = f (000) > f (100) = 0.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ И ФОРМА ОТЧЕТНОСТИ

Задание 1. Проверить принадлежность булевой функции $f(x_1, x_2, x_3) = (0, 2, 5, 7)$ пяти классам Поста

I вариант $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 2, 3, 4, 7)$

II вариант $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 1, 4, 5, 7)$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что называют функционально полной системой функций? Сформулируйте теорему Поста-Яблонского.
2. Что такое полином Жегалкина?

Практическая работа № 6

МНОЖЕСТВА И ОСНОВНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

***ЦЕЛЬ РАБОТЫ*:** научиться выполнять операции над множествами и представлять множества кругами Эйлера.

Для выполнения работы необходимо ***знать*** основные принципы теории множеств; необходимо ***уметь*** формулировать задачи логического характера и применять методы математической логики для их решения.

ВРЕМЯ ВЫПОЛНЕНИЯ: 90 минут.

КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

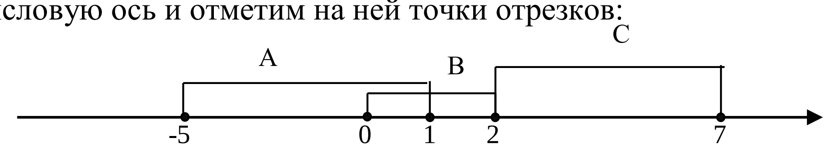
Совокупность элементов, объединенных некоторым признаком, образует **множество**. Над множествами можно совершать следующие операции:

1. **Объединение (A∪B)** – включает элементы, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A и B.
2. **Пересечение (A∩B)** – включает элементы, которые одновременно принадлежат A и B.
3. **Разность (A\B)** – включает элементы, которые принадлежат A и не принадлежат B.

4. **Дополнение (A')** – включает элементы, которые не принадлежат множеству A (т.е. дополняют его до универсального U).
5. **Декартово произведение (AxB)** – включает упорядоченные пары (a, b), в которых первый элемент $a \in A$, второй элемент $b \in B$.

Пример 1. На множестве U букв русского алфавита заданы множества:
A = {л, о, г, и, к, а}
B = {у, р, о, к}
C = {г, р, у, п, п, а}
Найти следующие множества: А) $(A \cap B) \cup C$; Б) $(A \cup B) \cap C$; В) $U \setminus (A \cup B \cup C)$
Решение
А) $(A \cap B) \cup C$
Сначала определим пересечение множеств A и B ($A \cap B$), которое включает буквы, принадлежащие одновременно множествам A и B.
$A \cap B$ = {о, к}
Объединим получившиеся пересечение с множеством C. Объединение будет содержать элементы, которые принадлежат хотя бы одному из множеств: $(A \cap B) \cup C$ = {о, к, г, р, у, п, п, а}
Б) $(A \cup B) \cap C$
Объединение множеств $A \cup B$ = {л, о, г, и, к, а, у, р}
$(A \cup B) \cap C$ = {г, а, у, р}
В) $U \setminus (A \cup B \cup C)$
Объединение множеств $A \cup B \cup C$ = {л, о, г, и, к, а, у, р, п}
Универсальным множеством является множество букв русского алфавита, поэтому в разности $U \setminus (A \cup B \cup C)$ будут содержаться буквы алфавиты, не входящие в объединение $(A \cup B \cup C)$
$U \setminus (A \cup B \cup C)$ = {б, в, д, е, ё, ж, з, и, й, м, н, с, т, ф, х, ц, ч, ш, щ, ъ, ь, ы, э, ю, я}

Пример 2. Даны отрезки A = [-5, 1], B = [0, 2], C = [2, 7].
Найти следующие множества: А) $(A \cup B)$; Б) $(A \cap B) \cup C$; В) $(C \cup B) \setminus (A \cap B)$
Решение
Нарисуем числовую ось и отметим на ней точки отрезков:



А) $(A \cup B)$ = [-5, 2]
Б) $(A \cap B) \cup C$ = [0, 1] $\cup$ C = [0, 1] $\cup$ [2, 7].
В) $(C \cup B) \setminus (A \cap B)$ = [0, 7] \ [0, 1] = [1, 7]

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ И ФОРМА ОТЧЕТНОСТИ

Задание 1. Укажите множество элементов множества, соответствующие записи. Выпишите один элемент, принадлежащий множеству, и один элемент, не принадлежащий этому множеству.

I вариант	**II вариант**	**III вариант**
$M = \{x \mid x^2 + 2x + 2 > 0\}$	$M = \{x \mid x^2 - 5x + 6 < 0\}$	$M = \{x \mid x^2 - x - 12 \le 0\}$
IV вариант	**V вариант**	**VI вариант**
$M = \{x \mid x^2 + x - 20 < 0\}$	$M = \{x \mid x^2 - 8x - 9 \ge 0\}$	$M = \{x \mid x^2 + 10x + 21 > 0\}$

Задание 2. На множестве U букв русского алфавита заданы множества A, B, C. Найти следующие множества и изобразить их кругами Эйлера.
А) $(A \cap B) \cup C$; Б) $(A \cup B) \cap C$; В) $U \setminus (A \cup B \cup C)$

I вариант	**II вариант**	**III вариант**
A = {д, о, с, к, а}	A = {г, р, у, ш, а}	A = {м, о, р, я, к}

B = {л, о, д, к, а} C = {к, н, и, г, а}	B = {б, у, г, о, р} C = {к, н, и, г, а}	B = {я, к, о, р, ь} C = {к, р, о, н, а}
IV вариант	**V вариант**	**VI вариант**
A = {б, и, л, е, т} B = {б, и, р, к, а} C = {т, а, л, о, н}	A = {з, а, в, о, д} B = {н, а, р, о, д} C = {д, о, с, к, а}	A = {п, а, л, е, ц} B = {ц, а, п, л, я} C = {п, е, т, л, я}

Задание 3. Даны отрезки A, B, C. Найти следующие множества:
А) $(A \cup B)$;   Б) $(A \cap B) \cup C$; В) $(C \cup B) \setminus (A \cap B)$

I вариант	II вариант	III вариант
A = [-2, 7]; B = [3, 10]; C = [5, 15]	A = [-4, 2]; B = [0, 6]; C = [3, 9]	A = [0, 8]; B = [4, 12]; C = [9, 20]
IV вариант	**V вариант**	**VI вариант**
A = [-6, 0]; B = [-3, 5]; C = [2, 8]	A = [0, 4]; B = [2, 9]; C = [5, 11]	A = [-1, 8]; B = [4, 13]; C = [6, 17]

Задание 4.
Даны множества A, B. Определить декартово произведение множеств А) AxB;   Б) AxA

I вариант	II вариант	III вариант
A = {8, 9, 10} B = {а, б}	A = {а, б, с} B = {3, 4}	A = {5, 6, 8} B = {л, к}
IV вариант	**V вариант**	**VI вариант**
A = {о, п, р} B = {0, 1}	A = {1, 5, 10} B = {к, н}	A = {д, г, в} B = {20, 21}

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какими способами можно задать множество?
2. Поставьте в соответствие операциям над множествами логические операции?

Практическая работа № 7

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА ФОРМУЛУ ВКЛЮЧЕНИЙ-ИСКЛЮЧЕНИЙ. ГРАФИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ МНОЖЕСТВ НА ДИАГРАММАХ ЭЙЛЕРА-ВЕННА

***ЦЕЛЬ РАБОТЫ*:** научиться решать задачи на подсчет количества элементов, доказывать теоретико-множественные соотношения аналитически и с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

Для выполнения работы необходимо ***знать*** основные принципы теории множеств; необходимо ***уметь*** формулировать задачи логического характера и применять методы математической логики для их решения.

ВРЕМЯ ВЫПОЛНЕНИЯ: 90 минут.

КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Операции над множествами применяются для решения задач о нахождении числа элементов множеств, заданных несколькими условиями.

$\mathbf{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)}$ - формула количества элементов в объединении двух конечных множеств (формула включений-исключений для двух множеств);

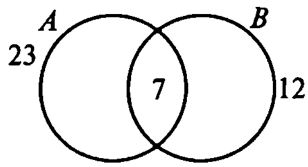
$\mathbf{n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(C \cap B) + n(A \cap B \cap C)}$ - формула включений-исключений для трех множеств.

Пример 1. Каждый студент группы программистов занимается в свободное время либо в НСО, либо спортом. Сколько студентов в группе, если 23 увлекаются спортом, 12 занимаются НСО, а 7 совмещают занятия в НСО и увлечение спортом?

Дано:

A – множество студентов, увлекающихся спортом.

B – множество студентов, занимающизся в НСО.



$n(A) = 23$

$n(B) = 12$

$n(A \cap B) = 7$

Найти: $n(A \cup B)$ - ?

Решение Используем формулу включения-исключения для 2 множеств.

$n(A \cup B) = 23 + 12 – 7 = 28.$

Пример 2. Из 70 компьютеров компьютерного класса физического факультета университета Крита на 26 установлен веб-браузер Mozilla Firefox, на 36 – браузер Opera, а на 31 – Google Chrome. На восьми компьютерах имеется Firefox и Opera, а на 15 – Opera и Chrome. Firefox и Chrome мирно сосуществуют на пяти компьютерах. Все три перечисленные интернет-программы установлены на трех компьютерах.

На скольких компьютерах не установлен ни один из перечисленных браузеров?

Дано:

A – множество компьютеров, на которых установлен браузер Mozilla Firefox

B – множество компьютеров, на которых установлен браузер Opera

C – множество компьютеров, на которых установлен браузер Google Chrome

$n(A) = 26$

$n(B) = 36$

$n(B) = 31$

$n(A \cap B) = 8$

$n(B \cap C) = 15$

$n(A \cap C) = 5$

$n(A \cap B \cap C) = 3$

$n(A \cup B \cup C) = 70$

Найти: D – множество компьютеров, на которых не установлен ни один из перечисленных браузеров

Решение Используем формулу включения-исключения для 3 множеств.

$70 = 26 + 36 + 31 – 8 – 15 – 5 + 3$

$70 = 68$

$D = 70 – 68 = 2.$

Используя определения операций и свойства операций можно доказывать различные теоретико-множественные соотношения.

Пример 3. Доказать равенство $A \backslash B = A \cap B'$ аналитически и с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

Решение.

1) Для доказательства равенства двух множеств аналитически нужно показать, что каждое из множеств является подмножеством другого. Это можно осуществить, выбирая произвольный элемент одного множества и доказывая, что он принадлежит другому множеству.

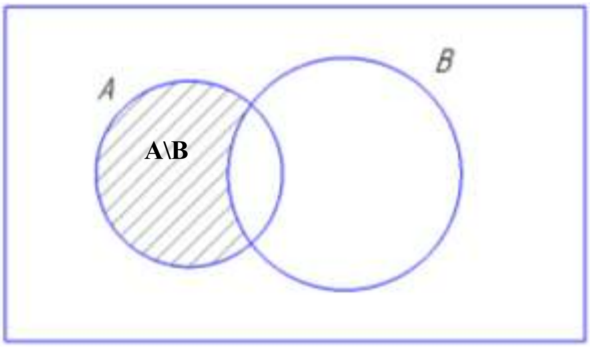
$a \in A \backslash B \leftrightarrow (a \in A)$ и $(a \notin B)$ – по определению разности $A \backslash B$

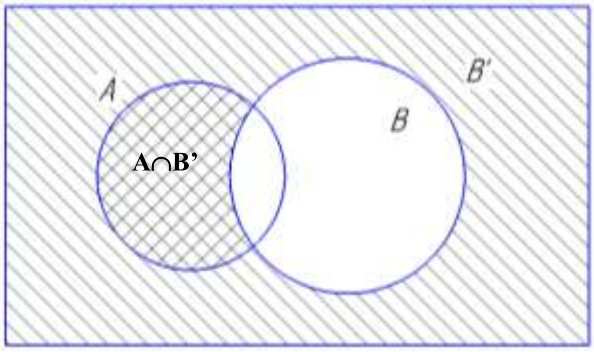
$\leftrightarrow (a \in A)$ и $(a \in B')$ – по определению дополнения

$\leftrightarrow a \in A \cap B'$ – по определению пересечения.

Равенство $A \backslash B = A \cap B'$ доказано.

2) Чтобы доказать равенство двух множеств графически, необходимо изобразить диаграммы Эйлера-Венна для каждого множества и показать, что области данных множеств совпадают.





ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ И ФОРМА ОТЧЕТНОСТИ

Задание 1.

Используя формулу включения и исключения решить задачи. Изобразить множества, используемые в задаче с помощью диаграмм Эйлера-Венна

I вариант

1. Все девочки в классе увлекаются вязанием или шитьем. Сколько девочек в классе, если вязанием занимаются 15 человек, шитьем – 20, а вязанием и шитьем – 10?
2. Из 100 студентов университета английский язык знают 28 студентов, немецкий — 30, французский — 42, английский и немецкий — 8, английский и французский — 10, немецкий и французский — 5, все три языка знают 3 студента. Сколько студентов не знают ни одного из трех языков?

II вариант

1. Художник Худобеднов за месяц работы написал 42 картины. На 17 из них есть лес, на 26 – река, а на 13 – и то, и другое, на остальных картинах – не пойми что. Сколько картин изображают не пойми что?
2. В первом классе читать умеют 12 учеников, считать – 8, писать – 9; читать и писать – 4, читать и считать – 5, писать и считать – 3; читать, писать и считать – 2; 6 учеников до сих пор ничему не научились. Сколько учеников в классе?

III вариант

1. В группе – 29 студентов. Каждый из них изучает или английский, или немецкий язык. 5 студентов изучает и английский, и немецкий одновременно. Сколько студентов занимаются в английской группе, если в немецкой – 12 студентов.
2. В летнем лагере 70 ребят. Из них 27 занимаются в драмкружке, 32 поют в хоре, 22 увлекаются спортом. В драмкружке 10 ребят из хора, в хоре 6 спортсменов, в драмкружке 8 спортсменов; 3 спортсмена посещают и драмкружок, и хор. Сколько ребят не поют в хоре, не увлекаются спортом и не занимаются в драмкружке?

IV вариант

1. В классе 28 учащихся, 15 из них занимаются музыкой, 13 увлекаются теннисом, а 8 занимаются и музыкой, и теннисом. Есть ли в классе ученики, равнодушные и к музыке, и к теннису, и если есть, то сколько их?
2. На экзамене по математике не решили ни одной задачи 5 человек, решили первую задачу – 3 человека, вторую задачу – 7 человек, третью задачу – 8 человек, 1-ую и 2-ую задачи – 2 человека, 1-ую и 3-ую – 2 человека, 2-ую и 3-ую – 4 человека, все задачи – 1 человек. Сколько было всего студентов?

V вариант

1. Из 35 учащихся класса 20 посещают математический кружок, 11 – физический, 10 – не посещают кружки. Сколько учеников посещают математический и физический кружки одновременно?

2. На вступительном экзамене по математике были предложены три задачи: по алгебре, планиметрии и стереометрии. Из 1000 абитуриентов задачу по алгебре решили 800, по планиметрии — 700, а по стереометрии — 600 абитуриентов. При этом задачи по алгебре и планиметрии решили 600 абитуриентов, по алгебре и стереометрии — 500, по планиметрии и стереометрии — 400. Все три задачи решили 300 абитуриентов. Существуют ли абитуриенты, не решившие ни одной задачи, и если да, то сколько их?

VI вариант

1. В группе – 25 студентов. Каждый из них изучает или английский, или французский язык. 6 студентов изучает и английский, и французский одновременно. Сколько студентов занимаются во французской группе, если в английский – 18 студентов.
2. В классе 30 человек. Из них 15 занимаются в драмкружке, 18 поют в хоре, 16 увлекаются спортом. В драмкружке 10 ребят из хора, в хоре 6 спортсменов, в драмкружке 8 спортсменов; 5 спортсменов посещают и драмкружок, и хор. Сколько ребят не поют в хоре, не увлекаются спортом и не занимаются в драмкружке?

Задание 5.

Доказать равенство аналитическим способом и с помощью диаграмм Эйлера-Венна..

I вариант	**II вариант**	**III вариант**
$(A\cup B) \cap C=(A\cap C) \cup(B\cap C)$	$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$	$(A\cap B)' = A'\cup B'$
IV вариант	**V вариант**	**VI вариант**
$(A\cup B)' = A'\cap B'$	$(A\setminus B)\cap C = (A\cap C)\setminus B$	$A\setminus(B\cup C) = (A\setminus B)\cap(A\setminus C)$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Как можно доказать теоретико-множественные соотношения?

Практическая работа № 8

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ БИНАРНЫХ ОТНОШЕНИЙ. ТЕОРИЯ ОТОБРАЖЕНИЙ И АЛГЕБРА ПОДСТАНОВОК

***ЦЕЛЬ РАБОТЫ*:** научиться определять свойства бинарных отношений, выполнять операции над бинарными отношениями и подстановками.

Для выполнения работы необходимо ***знать*** основные принципы теории множеств; необходимо ***уметь*** формулировать задачи логического характера и применять методы математической логики для их решения.

ВРЕМЯ ВЫПОЛНЕНИЯ: 90 минут.

КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Бинарным отношением называется любое непустое подмножество R декартова произведения XxY множеств X и Y.

Запись бинарного отношения: xRy, читается как «x и y находятся в отношении R.

Свойства бинарных отношений.

1. ***Рефлективность***: xRx.
2. ***Антирефлективность***. Имеет место, когда отношение не обладает свойством рефлективности для любых x.
3. ***Симметричность.*** Если для любых x и y одновременно справедливо xRy и yRx.
4. ***Антисимметричность***. Если для несовпадающих элементов x и y верно отношение xRy, то ложно yRx.
5. ***Транзитивность.*** Если xRy и yRz, то xRz.

6. ***Антитранзитивность.*** Имеет место, когда отношение не обладает свойством транзитивности.
7. ***Полнота (или связность)***. Для любых x и y выполняется либо xRy, либо yRx, либо и то и другое.

Пример 1. Определите, является ли отношение «соседи по дому» на множестве людей рефлективным, симметричным и транзитивным.

Решение.

Пусть M – множество соседей. Проверим выполнение свойств рефлективности, симметричности и транзитивности для отношения R(x,y) = «x сосед y»

А) Отношение «соседи» на множестве людей не рефлективно, так как любой человек не является своим соседом.

«x сосед x» - ложно.

Б) Оно симметрично. Например, если Иванов – сосед Петрова, то справедливо, что Петров – сосед Иванова.

Если «x сосед y», то «y сосед x».

В) отношение не транзитивно. Например, если дом Петрова расположен строго между домами Иванова и Сидорова, то Иванов с Петровым и Петров с Сидоровым – соседи, но Иванов и Сидоров соседями не являются.

Из того, что «x сосед y» и «y сосед z» не следует «x сосед z».

Ответ: отношение «соседи» на множестве людей не рефлективно, симметрично, не транзитивно.

Пример 2. Определите является отношение R(x,y) = «x – y есть целое число» отношением рефлективности, симметричности и транзитивности. Является ли данное отношение отношением эквивалентности?

Решение

№	Свойство	Конкретный пример выполнения алгоритма
1	Рефлективность	Проверим R(x,x): $x - x = 0 \in Z$ Отношение R рефлективно.
2	Симметричность	Если разность x – y есть целое число, то и разность y – x = - (x – y) – противоположное исходному целому, и поэтому тоже целое число. Отношение R симметрично.
3	Транзитивность	Пусть $(x - y) \in Z$ и $(y - z) \in Z$ Тогда $(x - z) = (x - y) + (y - z)$ есть сумма целых числе, т.е. $(x - z) \in Z$. Отношение R транзитивно.

Ответ: отношение «x – y есть целое число» на множестве целых числе рефлективно, симметрично, транзитивно, следовательно отношение эквивалентно.

Пример 3. На множестве M = {a, b, c, d, e} задано бинарное отношение R(M) = {(a, a), (a, b), (b, c), (c, d), (d, d), (d, e)}. Построить отношения: обратное к R, дополнительное к R, тождественное бинарное отношение U и универсальное бинарное отношение I.

Решение

1) По определению **обратное бинарное отношение** должно содержать все обратные пары исходного бинарного отношения:
   R^{-1} = {(a, a), (b, a), (c, b), (d, c), (d, d), (e, d)}

2) По определению на множестве M = {a, b, c, d, e} **дополнительное** к R(M) бинарное отношение должно содержать все пары из декартова произведения, которые не принадлежат к R(M).
   $\bar{R}$ = {(a, c), (a, d), (a, e), (b, a), (b, b), (b, d), (b, e), (c, a), (c, b), (c, c), (c, e), (d, a), (d, b), (d, c), (e, a), (e, b), (e, c), (e, d), (e, e)}
3) По определению **тождественное бинарное отношение** состоит из тождественных элементов.
   U = {(a, a), (b, b),(c, c), (d, d), (e, e)}
4) По определению универсальное бинарное отношение содержит все пары из декартова произведения.
   I = {(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (b, a), (b, b), (b, c), (b, d), (b, e), (c, a), (c, b), (c, c), (c, d), (c, e), (d, a), (d, b), (d, c), (d, d), (d, e), (e, a), (e, b), (e, c), (e, d), (e, e)}

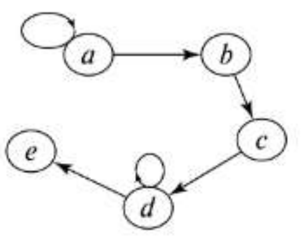
Существуют несколько основных способов задания бинарных отношений: перечисление, графическое представление, матричное представление.

При графическом представлении каждый элемент множества M представляется вершиной, а пара (x, y) представляется дугой из x в y.

Матричным способом бинарные отношения задаются с помощью матрицы смежности. Матрица смежности представляет собой квадратную матрицу m x m, где m – мощность множества M и каждый ее элемент равен единице, если пара (x, y) принадлежит R(M), и равен нулю в противном случае.

Пример 4. Записать графическое и матричное представление для R(M) = {(a, a), (a, b), (b, c), (c, d), (d, d), (d, e)}}

Решение



	a	*b*	*c*	*d*	*e*
a	1	1	0	0	0
b	0	0	1	0	0
c	0	0	0	1	0
d	0	0	0	1	1
e	0	0	0	0	0

Взаимно-однозначное отображение множества {1,2,3, …,n} на само себя называется **подстановкой** n чисел, где n – степень подстановки.

Обычно подстановку записывают в виде двух строк, заключенных в скобки. При этом в первой строке аргументы (первые координаты), а во второй строке в соответствующие им образы (вторые координаты).

Пример 5. Дана подстановка:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

1) Приведите подстановку σ_1 к каноническому виду
2) Найдите обратную подстановку σ_1^{-1}
3) Найдите квадрат подстановки σ_1^2

Решение

1) В верхней строке запишем числа в порядке возрастания от 1 до 5. В нижней – соответствующие им значения $\sigma_1(1) = 5$, $\sigma_1(2) = 4$, $\sigma_1(3) = 1$, $\sigma_1(4) = 2$, $\sigma_1(5) = 3$.
   Получим $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ **- канонический вид подстановки**

2) В каноническом виде подстановки σ_1 поменяем строки местами и упорядочим пары (приведем к каноническому виду) по новой первой строке.

$\sigma_1{}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ – **обратная подстановка**

3) Определим квадрат подстановки $\sigma_1{}^2$

А) поменяем в каноническом виде подстановки σ_1 порядок столбцов так, чтобы новая строка повторяла старую вторую.

$$\sigma_1{}' = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Б) подпишем подстановку $\sigma_1{}'$ под постановкой σ_1 и вычеркнем одинаковые вторую и третью строки:

$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \cancel{5} & \cancel{4} & \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} \end{pmatrix}$

$\sigma_1{}' = \begin{pmatrix} \cancel{5} & \cancel{4} & \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Получим

$$\sigma_1{}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ **квадрат подстановки**}$$

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ И ФОРМА ОТЧЕТНОСТИ

Задание 1.

Объясните, будет ли выполнима рефлективность, симметричность или транзитивность отношений на заданных множествах, и почему:

I вариант «быть знакомым» на множестве людей

II вариант «быть отцом» на множестве людей

III вариант «играть в одном спектакле» на множестве актеров

IV вариант быть одногруппником» на множестве людей

Задание 2.

Определите является ли преложенное отношение рефлектиным, симметричным и транзитивным.

I вариант «x/y – целое число»

II вариант «x/y – рациональное число»

III вариант «x + y – четное число»

IV вариант «x^y – четное число»

Задание 3. *На множестве M = {a, b, c, 1, 2} задано бинарное отношение R(M).*

А) Постройте отношения: обратное к R, дополнительное к R, тождественное бинарное отношение U и универсальное бинарное отношение I.

Б) Запишите графическое и матричное представление данных бинарных отношений.

I вариант R(M) = {(a, 2), (b, 1), (b, 1), (c, c), (c, 2), (2, 2)}

II вариант R(M) = {(a, b), (a, 1), (b, b), (c, 2), (1, 2), (2, 2)}

III вариант R(M) = {(a, a), (a, c), (b, c), (b, 1), (c, c), (2, 2)}

IV вариант R(M) = {(a, c), (b, b), (b, c), (c, 1), (1, 1), (1, 2)}

Задание 4. Выполните операции над подстановками

1) Приведите подстановку σ_1 к каноническому виду

2) Найдите обратную подстановку σ_1^{-1}

3) Найдите произведение подстановок $\sigma_1 \circ \sigma_2$

4) Найдите квадрат подстановки σ_1^2

I вариант $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

II вариант $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

III вариант $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

IV вариант $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

4. Какое бинарное отношение обладает свойством эквивалентности?
3. Что такое отображение?

Практическая работа № 9

НАХОЖДЕНИЕ ОБЛАСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ИСТИННОСТИ ПРЕДИКАТА. ОПЕРАЦИИ НАД ПРЕДИКАТАМИ.

ЦЕЛЬ РАБОТЫ**:** научиться находить область определения и истинности предиката; выполнять логические операции над предикатами; формализовывать предложения, используя предикаты и кванторы; строить отрицания к высказываниям, содержащим кванторы.

Для выполнения работы необходимо ***знать*** основы языка и алгебру предикатов; необходимо ***уметь*** формулировать задачи логического характера и применять методы математической логики для их решения.

ВРЕМЯ ВЫПОЛНЕНИЯ: 90 минут.

КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Предикатом называется предложение, содержащее одну или несколько переменных, при подстановке в которые конкретных значений, предложение обращается в высказывание.

Множество М, на котором определен предикат P(x), называется областью **определения предиката**.

Множество всех элементов $x \in M$, при которых предикат принимает значение «истина», называется **множеством истинности предиката (Т).**

Пример 1. Найти множество истинности предиката P(x): $6x^2 - 24 = 0$, если его область определения множество всех действительных чисел.

Решение

Для нахождения множества истинности предиката определим корни уравнения:

$6x^2 - 24 = 0$

$x^2 = 4$

$x_1 = -2$, $x_2 = 2$.

Ответ: Множество истинности T(P) = {-2, 2}.

Для предикатов определены логические операции: отрицание, дизъюнкция, конъюнкция, импликация, эквиваленция и следование.

Пример 2. На множестве M = {1, 2, 3, … ,20} заданы предикаты: A (x): «x не делится на 4»; B (x): «x – нечетное число»; C (x): «x – число простое»; D (x): «x кратно 5». Определить предикаты A(x) & D(x); $A(x) \vee C(x)$; $\bar{B}$ (x); $B(x) \to D(x)$ и найти их множества истинности.

Решение

1. Найдем множества истинности для исходных предикатов:
   T(A) = {1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 18, 19}

T(B) = {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19}
T(C) = {1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19}
T(D) = {5, 10, 15, 20}

2. A(x) & D(x): «число x не делится на 4 и кратно 5»
   T(A&D) = {5, 15}
3. $A(x) \vee C$ (x): «число x не делится на 4 или простое»
   T(A∨C) = {1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 15, 19}
4. $\overline{A}$ (x): «x делится на 4» T($\overline{A}$) = {4, 8, 12, 16, 20}
5. $B(x) \rightarrow$ D (x): «если x нечетное число, то оно кратно 5»
   T(B→D) = T ($\overline{B}$∨D)
   T ($\overline{B}$) = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20}
   T ($\overline{B}$∨D) = {2, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20}

Кроме логических операций над предикатами также определены две кванторные опреации: квантор общности и квантор существования.

Квантор общности (универсальный квантор) - ∀x.

∀xP(x) – для всех (любого) x истинно P(x). Это высказывание истинно тогда и только тогда, когда предикат P(x) выполняется для каждого значения переменного x.

Квантор существования - ∃x.

∃xP(x) – существует x, такой что истинно P(x). Это высказывание истинно тогда и только тогда, когда для некоторых значениях x выполняется предикат P(x).

Пример 3. Запишите высказывание для символичной записи (∃x)(∃y): (x^2+ y^2 > 25).

Определите истинность высказывания, считая, что все переменные принадлежат множеству действительных чисел.

Решение

Данную запись можно представить высказыванием: существует x и существует y, такие что x^2+ y^2 > 25. Высказывание является истинным, т.к. можно найти пару чисел x и y, для которых будет выполняться выражение x^2+ y^2 > 25 (например, x = 3 и y = 5).

Пример 4. Запишите высказывание «На каждой улице будет праздник» в символичной форме, введя предикаты.

Решение

1. Найдем область определения
   M: x – множество всех улиц
   y – множество всех праздников
2. Введем предикат P(x, y): x имеет свой Y.
   Данное высказывание в символичной форме запишется в виде: (∀x)(∃y)P(x, y)

Для построения отрицания высказываний, содержащих квантор $\frac{\text{общности } (\forall)}{\text{существования } (\exists)}$, достаточно заменить его на другой квантор $\frac{\text{существования } (\exists)}{\text{общности } (\forall)}$ и взять отрицание выражения, на которое этот квантор был «навешан».

Пример 5. Для данных высказываний построить их отрицание.

1) A: «Все целые числа являются простыми».

Данное высказывание содержит квантор общности (слово «все»), заменим его на квантор существования (слово «некоторые») и добавим отрицание с помощью частицы «не».

$\overline{A}$: «Некоторые целые числа не являются простыми»

2) A: «Некоторые люди любят есть репу»

Данное высказывание содержит квантор существования (слово «некоторые»), заменим его на квантор общности («все») и добавим отрицание с помощью частицы «не».

$\bar{A}$: «Все люди не любят есть репу».

Для неформальной проверки правильности умозаключений, включающих утверждения типа «для всех» и «для некоторого», используются диаграммы Эйлера, которые состоят из кругов, изображающих множества.

Утверждению "Все p есть q" соответствует диаграмма, приведенная на рис. 1. На ней круг, изображающий множество p, содержится в круге, изображающем множество q.

Утверждение "Некоторые p есть q" представляется диаграммой на рис. 2. На этой диаграмме пересечение кругов, изображающих множества p и q, непусто.

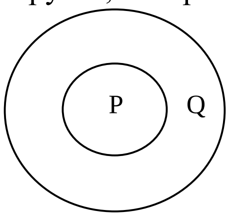


рис. 1

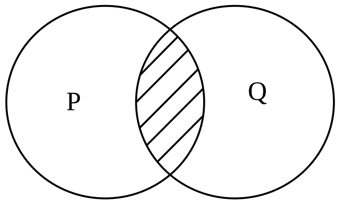


рис. 2

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ И ФОРМА ОТЧЕТНОСТИ

Задание 1. Найти множества истинности данных предикатов, если их область определения множество всех действительных чисел.

I вариант	**II вариант**
А) **P (x):** $x^2 - 4 = 0$; Б) **Q(x):** $3x - 2 < 17$	А) **P (x):** $2x^2 - 18 = 0$; Б) **Q(x):** $2x + 3 < 15$
III вариант	**IV вариант**
А) **P (x):** $3x^2 - 12 = 0$; Б) **Q(x):** $5x - 4 > 29$	А) **P (x):** $x^2 - 9 = 0$; Б) **Q(x):** $4x + 6 > 12$

Задание 2. На множестве M = {1,2,3, … ,20} заданы предикаты: A (x): «x не делится на 5»; B (x): «x – четное число»; C (x): «x – число простое»; D (x): «x кратно 3». Определить следующие предикаты и найти их множества истинности:

I вариант	**II вариант**
A (x) & B(x); $C(x) \vee D(x)$; $\bar{B}(x)$; $A(x) \to C(x)$;	C (x) & B (x); $B(x) \vee D(x)$; $\bar{C}(x)$; $C(x) \to A(x)$;
III вариант	**IV вариант**
C (x) & D (x); $B(x) \vee C(x)$; $\bar{A}(x)$; $D(x) \to C(x)$;	B (x) & D (x); $A(x) \vee B(x)$; $\bar{D}(x)$; $A(x) \to B(x)$;

Задание 3. Записать высказывание и определить его истинность, считая, что все переменные принадлежат множеству действительных чисел.

I вариант	**II вариант**
$(\exists x)(\forall y): (x + y = 10)$ $(\forall x)(\exists y)(\exists z): x*y = z$	$(\forall x)(\exists y): (x + y = 8)$ $(\forall x)(\forall y): (x>y)$
III вариант	**IV вариант**
$(\forall x)(\exists y)(x - y = 7)$ $(\forall x)(\forall y): (x+y>0)$	$(\exists x)(\forall y)(x - y = 5)$ $(\forall z)(\exists y)(\exists x): x + y = z$

Задание 4. Записать предложенное высказывание в символичной форме, введя предикаты.

I вариант	**II вариант**

У каждого человека есть мать. Некоторые студенты – второкурсники.	Существуют города, которые больше Москвы. На каждом доме есть номер.
III вариант	**IV вариант**
Каждое материальное тело имеет массу. Существуют кустарники, которые больше чем деревья.	Некоторые космические тела являются астероидами. У любой группы есть классный руководитель

Задание 5. Постройте отрицание к высказываниям, содержащим кванторы**.**

I вариант	II вариант
Все планеты имеют атмосферу. Некоторые люди ходят в театр.	Некоторые студенты учатся на «отлично». Все птицы улетают зимой в теплые края.
III вариант	**IV вариант**
Некоторые машины красного цвета. Все компьютеры подключены к Интернету.	Все кошки любят молоко. Некоторые приборы исправны.

Задание 6. Проверьте правильность умозаключений.

I вариант	II вариант
a) Все адвокаты богаты. Все богатые едят омаров. Все адвокаты едят омаров. b) Некоторые адвокаты богаты. Некоторые врачи богаты. Некоторые врачи – адвокаты.	a) Некоторые марсиане зеленые. Все елки зеленые. Некоторые марсиане – елки. b) Все мужчины любят мясо. Некоторые учителя – мужчины. Некоторые учителя любят мясо.
III вариант	**IV вариант**
a) Все врачи любят музыку. Все поэты любят музыку. Все врачи – поэты. b) Некоторые врачи умные. Все умные люди поэты. Некоторые врачи – поэты.	a) Все машины дорогие. Велосипед не дорогой. Велосипед – не машина. b) Все мужчины смотрят телевизор. Некоторые слесари – мужчины. Некоторые слесари смотрят телевизор.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. При каких условиях высказывания $\forall xP(x)$ и $\exists xP(x)$ истинны?
2. Где используются предикаты и кванторы?
3. Как с помощью диаграмм Эйлера строятся высказывания содержащие кванторы общности и существования?

Практическая работа № 10

ГРАФЫ. ИССЛЕДОВАНИЕ ОТОБРАЖЕНИЙ И СВОЙСТВ БИНАРНЫХ ОТНОШЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ГРАФОВ

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: научиться определять основные характеристики графов и решать задачи с их применением.

Для выполнения работы необходимо ***знать*** основные понятия теории графов; необходимо ***уметь*** формулировать задачи логического характера и применять методы математической логики для их решения.

ВРЕМЯ ВЫПОЛНЕНИЯ: 90 минут.

КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Графом $G = (V, X)$ называется пара двух конечных множеств: V – множества вершин и X – множества ребер. Если у ребер не указано направление, то такой граф называется ***неориентированным***, у ***ориентированного*** графа каждое ребро имеет направление.

Мультиграфом называется граф, содержащий кратные ребра.
Псевдографом называется граф, содержащий петли или/и кратные ребра.
Степенью вершины графа deg(V) называется количество ребер ей инцидентных.

<u>Операции над графами:</u>

1. Объединение графов включает все вершины и ребра, которые содержатся в исходных графах.
2. Пересечение графов включает только одинаковые вершины и ребра, которые содержатся в исходных графах.
3. Кольцевая сумма содержит объединение графов без их пересечения.
4. Дополнение содержит те вершины и ребра, которые не хватает исходному графу до полного графа.

Эйлеровым графом называется граф, содержащий эйлеров цикл (цикл, содержащий все ребра графа только один раз).
Гамильтоновым графом называется граф, содержащий гамильтонов цикл (цикл, проходящий через каждую вершину только один раз).
Матрицей инцидентности неориентированного графа (неографа) называется таблица, состоящая из n строк (по числу вершинам) и m столбцов (ребер), в которой могут быть следующие значения:

- 1, если вершина инцидента ребру
- 0, если вершина не инцидентна ребру
- 2, если ребро является петлей.

Матрицей инцидентности ориентированного графа (ортграфа) называется таблица, состоящая из n строк (по числу вершин) m столбцов (ребрам), в которой могут быть следующие значения:

- -1, если вершина является началом ребра
- 0, если вершина не инцидентна ребру
- 1, если вершина является концом ребра
- ±1, если ребро является петлей.

Матрицей смежности графа называется квадратная матрица с n элементам (по числу вершин), в которой могут быть следующие значения:

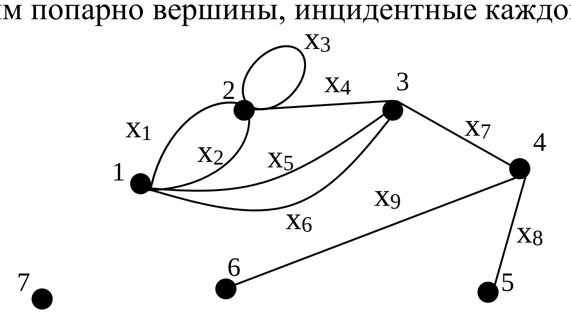
- 0, если между вершинами нет ребра
- λ, если между вершинами есть ребро с кратностью λ

Пример 1. Граф G = (V, X) задан множеством вершин, где V = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} и списком ребер X = {(1, 2), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (1, 3), (3, 1), (3, 4), (4, 6), (4, 5)}.

а) Постройте граф.
б) Укажите вид графа, наличие петель, изолированных вершин и кратных ребер.
в) Определите степень каждой вершины графа.
б) Постройте матрицу инцидентности.
г) Постройте матрицу смежности.

Решение

а) Соединим попарно вершины, инцидентные каждому из заданных ребер



б) Задан неориентированный псевдограф, имеющий две пары кратных ребер: $\{(1, 2)^2, (1, 3)^2\}$
Граф имеет изолированную вершину 7 и петлю в вершине 2.

в) deg(1) = 4, deg(2) = 5, deg(3) = 4, deg(4) = 3, deg(5) = 1, deg(6) = 1, deg(7) = 0

г) матрица инцидентности

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9
1	1	1	0	0	1	1	0	0	0
2	1	1	2	1	0	0	0	0	0
3	0	0	0	1	1	1	1	0	0
4	0	0	0	0	0	0	1	1	1
5	0	0	0	0	0	0	0	1	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	1
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0

г) матрица смежности

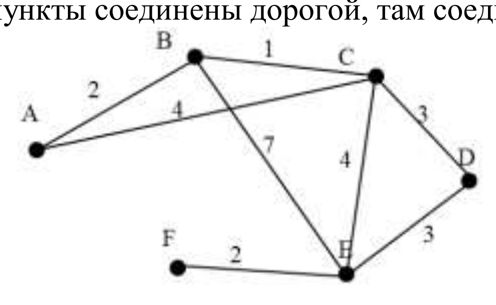
	1	2	3	4	5	6	7
1		2	2	0	0	0	0
2	2	1	1	0	0	0	0
3	2	1		1	0	0	0
4	0	0	1		1	1	0
5	0	0	0	1		0	0
6	0	0	0	1	0		0
7	0	0	0	0	0	0	

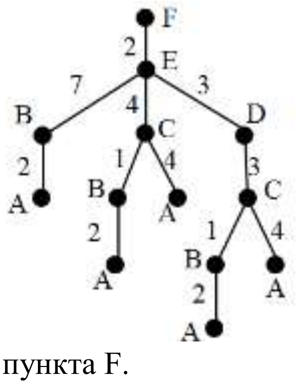
Пример 2. Между населёнными пунктами A, B, C, D, E, F построены дороги, протяжённость которых приведена в таблице. (Отсутствие числа в таблице означает, что прямой дороги между пунктами нет). Определите длину кратчайшего маршрута из A в F.

	A	B	C	D	E	F
A		2	4			
B	2		1		7	
C	4	1		3	4	
D			3		3	
E		7	4	3		2
F					2	

Решение

Изобразим с помощью графа данные таблицы. Точками обозначим населенные пункты. Там, где пункты соединены дорогой, там соединяем точки.





Нарисуем пути из пункта A в F. Начнем с конца, с пункта F.

Получим кратчайший путь AB-BC-CE-EF = 2 + 1 + 4 + 2 = 9

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ И ФОРМА ОТЧЕТНОСТИ

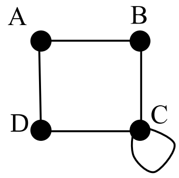
Задание 1. Граф G = (V, X) задан множеством вершин, где V = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} и списком ребер.

а) Постройте граф.
б) Укажите вид графа, наличие петель, изолированных вершин и кратных ребер.
в) Определите степень каждой вершины графа.
б) Постройте матрицу инцидентности.
г) Постройте матрицу смежности.

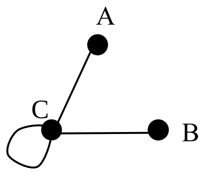
I вариант X = {(2, 3), (4, 3), (7, 6), (7, 7), (7, 2), (6, 4), (2, 7), (6, 4)}
II вариант X = {(4, 5), (6, 5), (7, 6), (7, 7), (7, 2), (6, 4), (2, 7), (6, 4)}

Задание 2. Даны два графа $G_1 = (V_1, X_1)$ и $G_2 = (V_2, X_2)$. Изобразите геометрически объединение графов $G_1 \cup G_2$; пересечение графов $G_1 \cap G_2$ и кольцевую сумму $G_1 \oplus G_2$.

I вариант

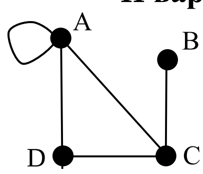


G1

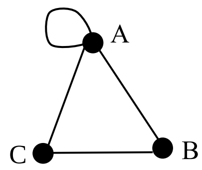


G2

II вариант



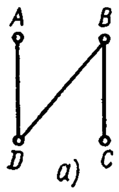
G1



G2

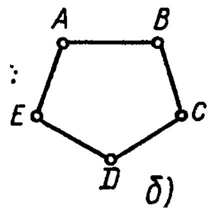
Задание 3. Изобразите дополнения графов:

I вариант



а)

II вариант



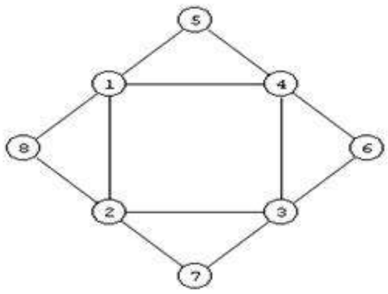
б)

Задание 4. Решить задачу с помощью ориентированного графа:
I вариант. Из пункта А в пункт В выехали пять машин одной марки разного цвета: белая, чёрная, красная, синяя, зелёная. Чёрная едет впереди синей, зелёная – впереди белой, но позади синей, красная впереди чёрной. Какая машина едет первой и какая последней?

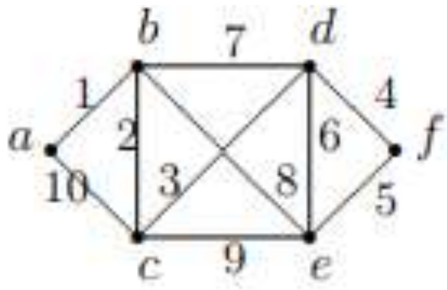
II вариант. Из Череповца в Вологду выехали пятеро велосипедистов: Белов, Чернов, Краснов, Смирнов и Захаров. Чернов едет впереди Смирнова. Захаров едет впереди Белова, но позади Смирнова. Краснов – впереди Чернова. Определите, в каком порядке едут велосипедисты.

Задание 5. Определить является ли граф эйлеровым. Проверить теорему о четности вершин эйлерова графа. Если граф является эйлеровым, то записать эйлеров цикл.

I вариант



II вариант



Задание 6. Между населёнными пунктами A, B, C, D, E, F построены дороги, протяжённость которых приведена в таблице. (Отсутствие числа в таблице означает, что прямой дороги между пунктами нет). Определите длину кратчайшего маршрута из A в F.

I вариант

	A	B	C	D	E	F
A		2	4	8		16
B	2			3		
C	4			3		
D	8	3	3		5	3
E				5		5
F	16			3	5	

II вариант

	A	B	C	D	E	F
A		4				
B	4		6	3	6	
C		6			4	
D		3			2	
E		6	4	2		5
F					5	

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что называют графом?
2. Охарактеризуйте виды графов.
3. Какими способами можно задать граф?

Практическая работа № 11

РАБОТА МАШИНЫ ТЬЮРИНГА

***ЦЕЛЬ РАБОТЫ*:** научиться строить машины Тьюринга и применять нормальные алгоритмы Маркова.

Для выполнения работы необходимо ***знать*** основы теории алгоритмов; необходимо ***уметь*** формулировать задачи логического характера и применять методы математической логики для их решения.

ВРЕМЯ ВЫПОЛНЕНИЯ: 90 минут.

КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Для уточнения понятия алгоритм его заменили строго формализованными математическими моделями: рекурсивные функции, машины Тьюринга и нормальные алгоритмы Маркова.

Машина Тьюринга состоит из ленты бесконечной длины, разделенной на ячейки, и управляющей головки, которая перемещается вдоль ленты.

Создать (запрограммировать) МТ означает создать ее **устройство управления** – нарисованную или напечатанную на листе бумаги прямоугольная таблица.

Входные символы / Состояния	S_0	S_1	S_2	S_n
q_1		Команды ТМ		
q_2				
q_n				

Команды ТМ записываются в виде: символ, направление передвижения, состояние.

Пример 1. На ленте есть слово, состоящее из символов #, $, 1 и 0. Составить программу, заменяющую все символы # и $ на нули. В момент запуска головка находится над первой буквой слова справа. Завершается программа тогда, когда головка оказывается над пустым символом после самой левой буквы слова.

Решение

Рассмотрим пример ленты для описанной машины Тьюринга:

S_0Hq_0 $1Лq_1$ $0Лq_1$ $0Лq_1$ $0Лq_1$

	S_0	1	#	$	0	S_0	

q_1 – состояние изменения символа и движения влево; q_1 – состояние остановки.

Получим следующую программу:

	S_0	1	0	#	$
q_1	S_0Hq_0	$1Лq_1$	$0Лq_1$	$0Лq_1$	$0Лq_1$

*Пример 2***.** Построить машину Тьюринга, которая прибавляет единицу к числу на ленте. Машина должна прибавить единицу к последней цифре числа. Если последняя цифра равна 9, то ее заменить на 0 и прибавить единицу к предыдущей цифре. В начальный момент машина находится против самой правой цифры числа.

Решение. Входное слово состоит из цифр целого десятичного числа, записанных в последовательные ячейки на ленте.

Программа для данной машины Тьюринга может выглядеть так:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	S_0
q_1	$1Hq_0$	$2Hq_0$	$3Hq_0$	$4Hq_0$	$5Hq_0$	$6Hq_0$	$7Hq_0$	$8Hq_0$	$9Hq_0$	$0Лq_0$	$1Hq_0$

q_1 — состояние изменения цифры, q_0 — состояние останова.

Пример 3. Алфавит машины Тьюринга состоит из символом a,b,c. Составить программу, которая переносит первый символ непустого слова Р в его конец.

Например:

	a	b	c	b			→			b	c	b	a	

Решение

Для решения этой задачи предлагается выполнить следующие действия:

1. Запомнить первый символ слова, используя различные состояния машины.
2. Стереть этот символ.
3. Перегнать автомат вправо под первую пустую клетку за словом, и записать в неё запомненный символ.

Программа будет следующей:

	a	b	c	S_0	
q_1	$S_0Пq_2$	$S_0Пq_3$	$S_0Пq_4$	S_0Hq_0	q_1 – анализ 1 символа, его удаление и разветвление программы
q_2	$aПq_2$	$bПq_2$	$cПq_2$	$a\ Hq_0$	q_2 – запись справа a
q_3	$aПq_3$	$bПq_3$	$cПq_3$	$b\ Hq_0$	q_3 – запись справа b
q_4	$aПq_4$	$bПq_4$	$cПq_4$	$c\ Hq_0$	q_4 – запись справа c

Нормальным алгоритмом Маркова называется непустой конечный упорядоченный набор формул подстановок. **Формулой подстановки** называется запись вида $\alpha\to\beta$, где α и β – любые слова (возможно, и пустые).

Работа алгоритма Маркова состоит из нескольких шагов:

1. Формулы просматриваются сверху вниз, начиная с верхней, выбирается первая применимая формула, далее выполняется подстановка и получается новое слово P_1.

2. Далее полученное слово P_1 берется за исходное и снова формулы просматриваются сверху вниз, начиная с верхней и т.д.

3. Работа алгоритма повторяется до тех пор, пока либо не возникнет ситуация, когда ни одна подстановка не подходит - правило остановки; либо не будет установлено, что процесс подстановок не может остановиться.

Пример 4. Дано слово 1 + 2 + 2 + 1 + 4. Какое слово получится в результате применения к нему марковских подстановок:

1) $2 + 2 \rightarrow 4$
2) $5 + 1 \rightarrow 6$
3) $1 + 4 \rightarrow 5$

Решение

$$1 + \underline{2 + 2} + 1 + 4 \xrightarrow{1} \underline{1 + 4} + 1 + 4 \xrightarrow{3} \underline{5 + 1} + 4 \xrightarrow{2} 6 + 4$$

Т.к. больше не одна подстановка не подходит, то работа алгоритма заканчивается.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ И ФОРМА ОТЧЕТНОСТИ

I вариант

Задание 1. Постройте машину Тьюринга

1. На ленте есть слово, состоящее из символов %, #, 0 и 1. Разработайте программу, заменяющую все символы % на # и наоборот. В момент запуска головка находится над первой буквой слова справа. Завершается программа тогда, когда головка оказывается над пустым символом после самой левой буквы слова.
2. Постройте машину Тьюринга, которая прибавляет единицу к числу, записанному в пятеричной системе счисления. В начальный момент машина находится против самой правой цифры числа (машина должна прибавить единицу к последней цифре числа, если последняя цифра равна 4, то ее заменить на 0 и прибавить единицу к предыдущей цифре).
3. Входной алфавит машины Тьюринга: A={a,b}. Составить программу, удаляющую из слова P его второй символ.

   Т.е. надо запомнить и стереть первый символ, передвинуть головку вправо и на месте второго символа записать первый символ.

	S_0	a	b	b	a	S_0	→	S_0	b	b	a	S_0	→	S_0	a	b	a	S_0	
		↑							↑						↑				

Задание 2. Примените подстановки нормального алгоритма Маркова

1. Нормальный алгоритм задан алфавитом A={a,b} и схемой:
   1) ba→ab
   2) ab→λ

   Примените этот алгоритм к слову bbaabab.
2. Примените к слову МУХА следующую схему НАМ:
   1) Х→К
   2) М→Р
   3) КА→ЛОН
   4) РУ→С
3. Дано слово 2 + 2 + 2 + 1 + 1 + 2. Какое слово получится в результате применения к нему марковских подстановок:
   1) $2 + 2 \rightarrow 4$
   2) $1 + 1 \rightarrow 2$
   3) $4 + 2 \rightarrow 6$

II вариант

Задание 1*. *Постройте машину Тьюринга

1. На ленте есть слово, состоящее из символов №, %, 0 и 1. Разработайте программу, заменяющую все символы № на % и наоборот. В момент запуска головка находится над первой буквой слова справа. Завершается программа тогда, когда головка оказывается над пустым символом после самой левой буквы слова.
2. Постройте машину Тьюринга, которая прибавляет единицу к числу, записанному в шестеричной системе счисления. В начальный момент машина находится против самой правой цифры числа (машина должна прибавить единицу к последней цифре числа, если последняя цифра равна 5, то ее заменить на 0 и прибавить единицу к предыдущей цифре).
3. Входной алфавит машины Тьюринга: A={c,d}. Составить программу, удаляющую из слова P его второй символ.

   Т.е. надо запомнить и стереть первый символ, передвинуть головку вправо и на месте второго символа записать первый символ.

	S_0	c	d	c	d	S_0	→	S_0	D	C	d	S_0	→	S_0	c	c	d	S_0	
		↑							↑						↑				

Задание 2. Примените подстановки нормального алгоритма Маркова

1. Нормальный алгоритм задан алфавитом A={a,b} и схемой:
   1) ba→ab
   2) ab→λ

   Примените этот алгоритм к слову aabbaab.
2. Примените к слову КОСА следующую схему НАМ:
   1) К→Р
   2) ЗА→ЛИК
   3) С→З
   4) РО→Б
3. Дано слово 3 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1. Какое слово получится в результате применения к нему марковских подстановок:
   1) 2 + 2 →4
   2) 1 + 1 →2
   3) 4 + 4 →8

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Сформулируйте тезис Черча.
2. Какова основная цель теории алгоритмов?

Литература

Основная литература:

1. Спирина М.С. Дискретная математика: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования/ М.С. Спирина, П.А. Спирин. – М.: Издательский центр «Академия», 2018. - 368 с.

Дополнительная литература:

1. Игошин В.И. Элементы математической логики: учеб. для студ. учреждений сред. проф. образования. – М.: Издательский дом «Академия», 2021. – 320 с.
2. Спирина М.С. Дискретная математика: Сборник задач с алгоритмами решений: учеб. пособие для студ. учреждений сред. проф. образования. / М.С. Спирина, П.А. Спирин. – М.: Издательский центр «Академия», 2017. - 288 с.
3. Баврин И.И. Дискретная математика: учебник и задачник для среднего профессионального образования. – М.: Издательство Юрайт, 2022. – 193 с. *(образовательная платформа Юрайт https://urait.ru/).*
4. Гашков С.Б. Дискретная математика: учебник и практикум для среднего профессионального образования / С.Б. Гашков, А.Б. Фролов. – М.: Издательство Юрайт, 2022. – 483 с. *(образовательная платформа Юрайт https://urait.ru/).*
5. Гисин В.Б. Дискретная математика: учебник и практикум для среднего профессионального образования. – М.: Издательство Юрайт, 2022. – 383 с. *(образовательная платформа Юрайт https://urait.ru/).*
6. Палий И.А. Дискретная математика и математическая логика: учебное пособие для среднего профессионального образования / С.Б. Гашков, А.Б. Фролов. – М.: Издательство Юрайт, 2022. – 370 с. *(образовательная платформа Юрайт https://urait.ru/).*

Интернет-ресурсы:

1. Онлайн калькулятор по математической логике [Электронный ресурс]. – Форма доступа: http://tablica-istinnosti.ru/ru/
2. Прикладная математика. Справочник математических формул. Примеры и задачи с решениями [Электронный ресурс]. – Форма доступа: http://www.pm298.ru
1. Математический форум MathHelpPlanet. Обсуждение и решение задач по математике, физике, химии, экономике [Электронный ресурс] – Форма доступа: http://mathhelpplanet.com/static.php